# Métodos de Previsão
## Mestrado em Decisão Económica e Empresarial

Jorge Caiado
CEMAPRE/ISEG, Universidade Técnica de Lisboa
Email: jcaiado@iseg.utl.pt
Web: http://pascal.iseg.utl.pt/~jcaiado/

# Programa da unidade curricular

**Parte 1. Métodos determinísticos de previsão**

- Conceitos e objectivos da análise de séries temporais
- Decomposição de séries temporais
- Médias móveis
- Ajustamento de sazonalidade, ajustamento de movimentos cíclicos e efeitos de calendário
- Alisamento exponencial simples, duplo e método de Holt
- Método de Holt-Winters
- Outras formas de alisamento
- Aplicações com o software EViews

**Parte 2. Modelos estocásticos de previsão**

- Estacionaridade, função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial
- Processos estacionários: modelos não sazonais (AR, MA e ARMA), modelos sazonais (SAR, SMA e SARMA) e modelos mistos (sazonais e não sazonais)
- Processos não estacionários: Modelos não sazonais (ARIMA), modelos sazonais (SARIMA) e modelos mistos (sazonais e não sazonais)
- Identificação de modelos, estimação dos parâmetros, avaliação do diagnóstico e selecção de modelos
- Previsão e combinação óptima de previsões
- Aplicações com o software EViews

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Conceitos e objectivos da análise de séries temporais

Uma **série temporal** (*time series*) consiste num conjunto de observações de uma variável, feitas em períodos sucessivos de tempo, durante um determinado intervalo e representa-se por $Y_t$ , $t$ = 1,2,...,$n$. São exemplos, as cotações diárias das acções, as vendas semanais de um dado produto financeiro, o número mensal de dormidas na hotelaria, as despesas públicas trimestrais do país, os lucros anuais de uma empresa, as temperaturas mínimas, médias e máximas diárias.

A representação gráfica de uma série temporal designa-se por **cronograma** e constitui o ponto de partida para a sua análise.

## Conceitos e objectivos da análise de séries temporais

Na análise de séries temporais devem ter-se em conta os seguintes **objectivos** fundamentais:

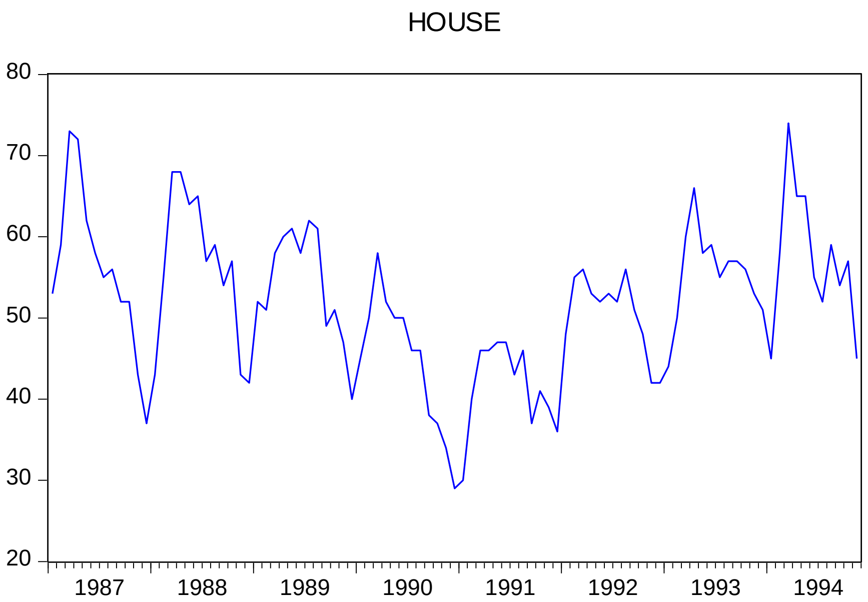
**Descrição**. Construção do cronograma da série e caracterização do seu andamento geral, procurando identificar os pontos de viragem (mudança de estrutura) e eventuais observações anómalas (*outliers*).

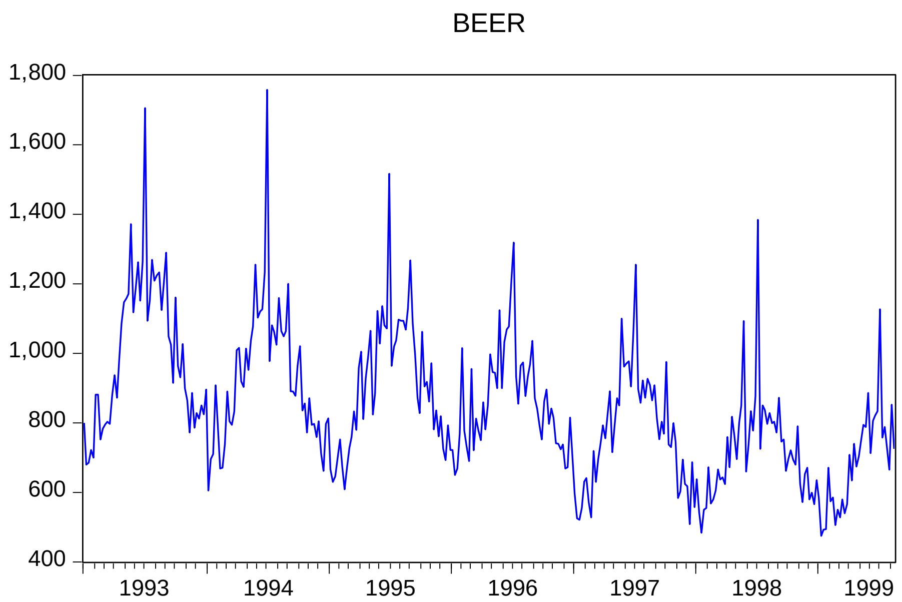
**Explicação ou Modelação**. Construção de modelos que permitam explicar o comportamento da série no período observado.

**Previsão**. Tentar prever a evolução futura da série com base exclusivamente no seu passado (modelos univariados ou não-causais) ou com base no comportamento passado de outras variáveis (modelos multivariados).

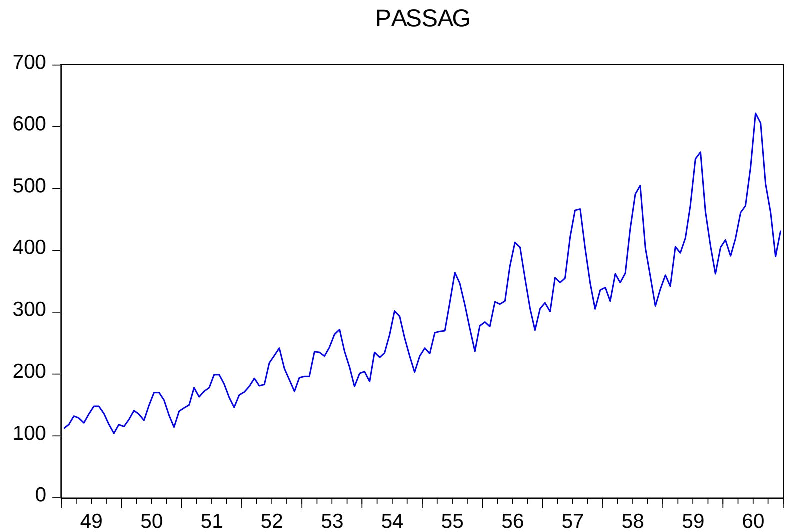
**Controlo**. Procurar modificar o comportamento futuro do processo através do ajustamento de variáveis controláveis. Por exemplo: numa linha de fabrico e montagem de automóveis, é possível prever o número de viaturas produzidas com base nas matérias-primas e mão-de-obra utilizadas na produção.

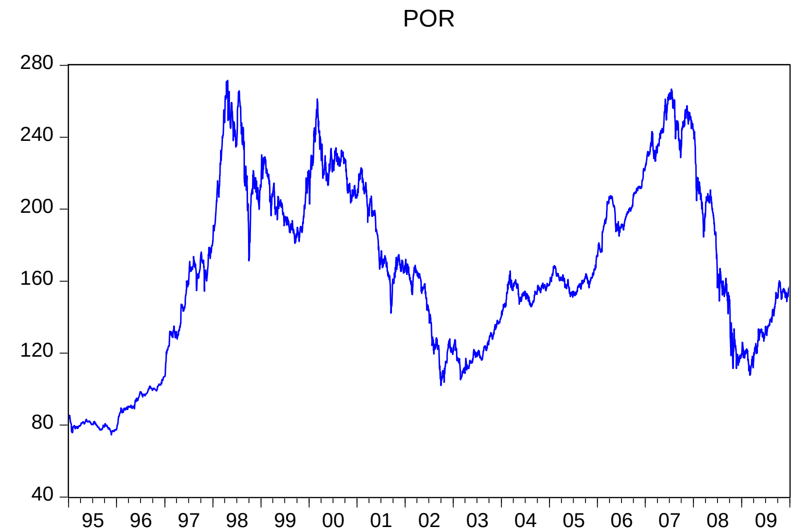
# Métodos Determinísticos de Previsão
## Conceitos e objectivos da análise de séries temporais

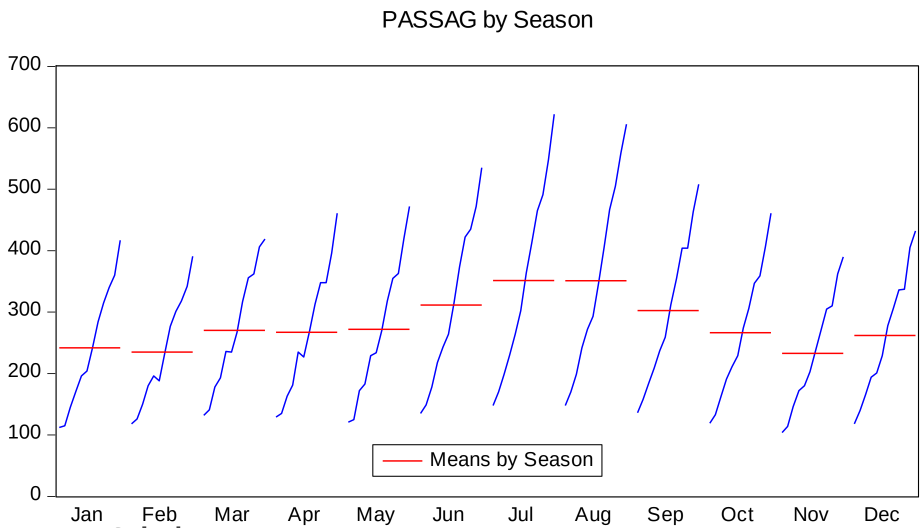


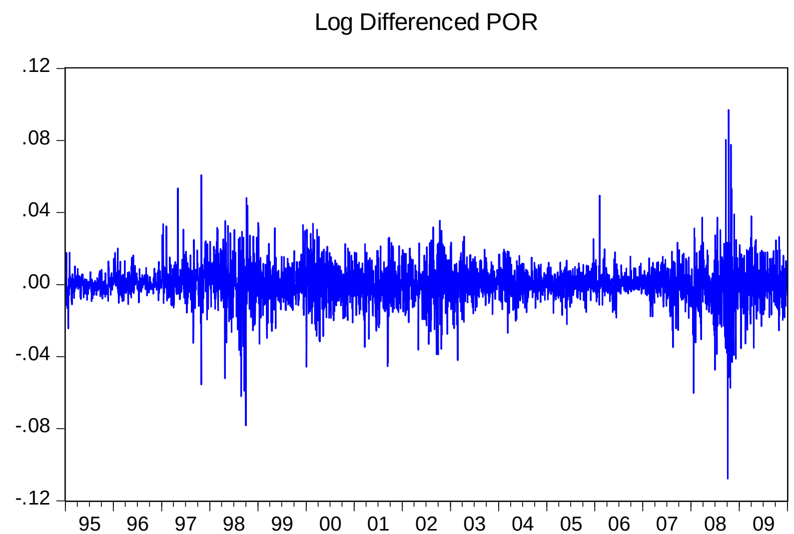



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Conceitos e objectivos da análise de séries temporais



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Decomposição de séries temporais

Os métodos tradicionais de análise de séries temporais baseiam-se na decomposição de um conjunto de efeitos ou forças componentes, a saber: tendência, movimentos oscilatórios ou cíclicos, sazonalidade e movimentos irregulares ou aleatórios.

A **tendência** caracteriza o andamento mais notório da série durante um longo período de tempo. Os **movimentos oscilatórios ou cíclicos** estão associados às fases de expansão e recessão dos sistemas económicos. Em ciclos longos, as componentes de tendência e cíclica são difíceis de separar, pelo que se pode tomar estas como uma única componente (tendência-cíclica).

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Decomposição de séries temporais

A **sazonalidade** refere-se às oscilações periódicas que ocorrem semanalmente, mensalmente ou trimestralmente no decurso do ano. Estas oscilações no comportamento da série podem estar associadas com as estações do ano (temperatura do ar, consumo de água, consumo de eletricidade, turismo), com medidas administrativas (início e fim do ano escolar), com tradições e costumes sociais ou culturais (por exemplo, o aumento das vendas no período natalício) ou com as variações do calendário (número de dias úteis do mês ou semana, número de sábados no mês).

Por último, os **movimentos irregulares ou aleatórios** são os movimentos da série que não são explicados pelas componentes anteriormente referidas.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Decomposição de séries temporais

O modelo de decomposição pode traduzir-se pela seguinte expressão:

$$Y_t = f(T_t, C_t, S_t, E_t),$$

onde a série $Y_t$ é função da componente de tendência (*trend*) $T_t$, da componente cíclica (*cycle*) $C_t$, da componente sazonal (*seasonal*) $S_t$ e da componente irregular (*irregular*) $E_t$. Como se referiu anteriormente, alguns autores não separam a componente de tendência da componente cíclica por estas representarem, em conjunto, o comportamento de longo prazo da série, dando lugar à expressão, $Y_t = f(TC_t, S_t, E_t)$, onde $TC_t$ representa a componente de tendência-cíclica (*trend-cycle*).

As formas funcionais mais correntemente utilizadas são o modelo multiplicativo e o modelo aditivo. O **modelo multiplicativo** descreve a série como o produto das componentes tendência, sazonalidade, cíclica e irregular:

$$Y_t = T_t \times C_t \times S_t \times E_t .$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Decomposição de séries temporais

O modelo multiplicativo é adequado a situações em que a amplitude da componente sazonal aumenta ou diminui com a tendência da série, o que acontece na maioria das séries económicas. Contudo, este método não pode ser implementado para séries temporais de valores negativos ou nulos.

Quando as oscilações de carácter sazonal não variam com o nível da série, podemos utilizar o **modelo aditivo**. Segundo o modelo aditivo, a série observada resulta da soma das componentes tendência, sazonalidade, cíclica e irregular, através da expressão:

$$Y_t = T_t + C_t + S_t + E_t \,.$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Avaliação dos erros de previsão

**Erro quadrático médio**. Traduz o valor médio dos desvios ao quadrado entre os valores observados e as previsões para os instantes 1, 2,..., *m*:

$$EQM = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}(Y_t - P_t)^2$$

**Erro absoluto médio**. Traduz o valor absoluto médio dos desvios entre os valores observados e as previsões para os instantes 1, 2,..., *m*:

$$EAM = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left|Y_t - P_t\right|$$

**Erro percentual absoluto médio**. Traduz o valor percentual absoluto médio dos desvios entre os valores observados e as previsões para os instantes 1, 2,..., *m*:

$$EPAM = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left|\frac{(Y_t - P_t)}{Y_t}\right| \times 100$$

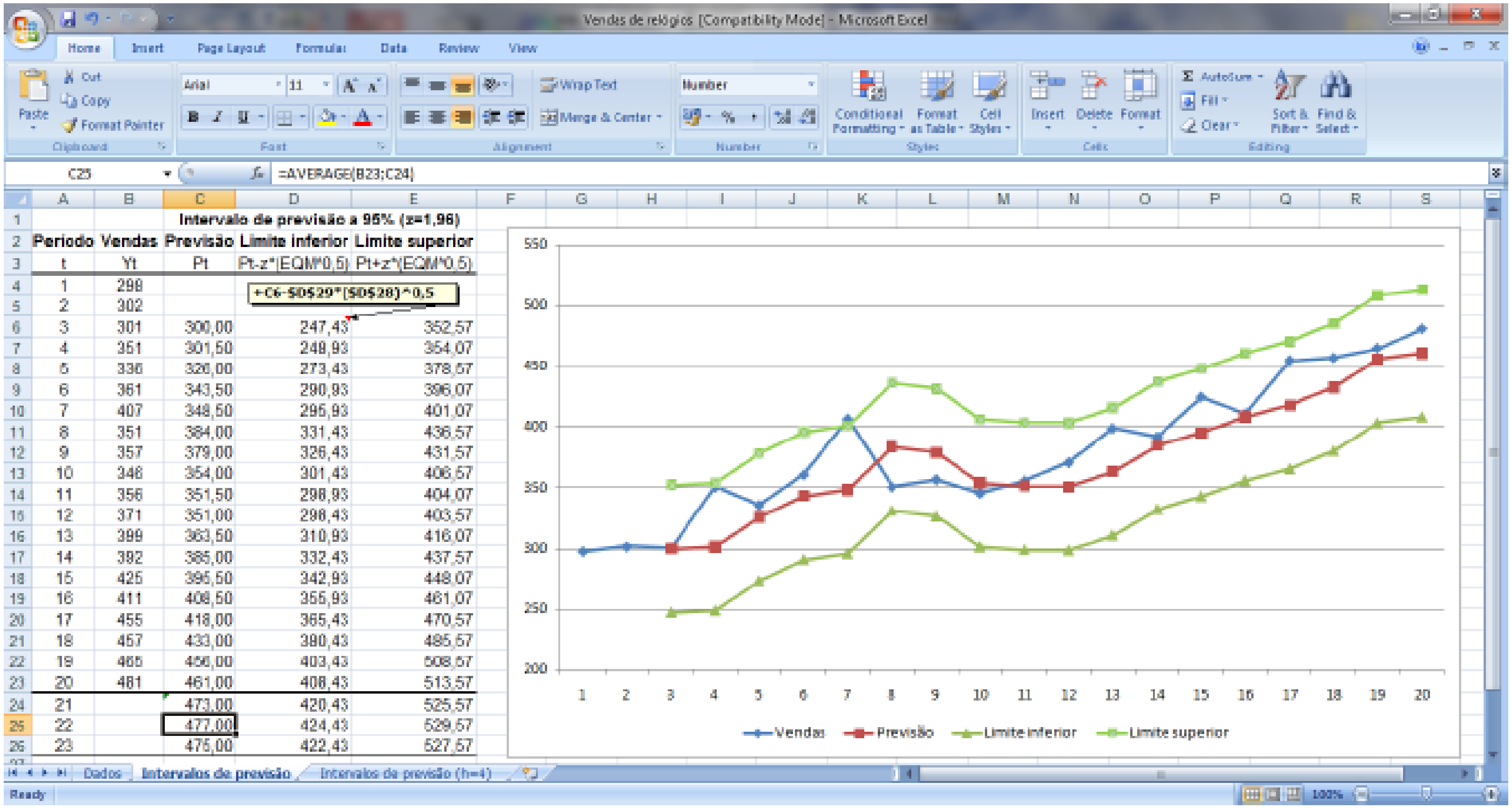
# Métodos Determinísticos de Previsão
## Intervalos de previsão

Os intervalos de previsão são baseados na medida do erro quadrático médio (EQM) que fornece uma estimativa da variância do erro de **previsão a um passo à frente** (isto é, com o horizonte temporal de um período). Se admitirmos a hipótese de que os erros de previsão têm distribuição aproximadamente Normal de média zero, podemos construir um intervalo de previsão aproximado para cada instante do tempo, através da expressão:

$$\left(P_t - z\sqrt{EQM}, P_t + z\sqrt{EQM}\right),$$

onde $z$ é o valor que limita o intervalo de previsão e corresponde a uma determinada probabilidade ou nível de confiança. Os graus de confiança mais utilizados em intervalos de previsão são 90%, 95% e 99%, a que correspondem valores de $z$ iguais a 1,645, 1,96 e 2,576, respectivamente.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Intervalos de previsão




Intervalo de previsão a 95% (z=1,96)

| Período | Vendas | Previsão | Limite inferior | Limite superior |
|---|---|---|---|---|
| t | Yt | Pt | Pt-z*(EQM^0,5) | Pt+z*(EQM^0,5) |
| 1 | 298 | | | |
| 2 | 302 | | | |
| 3 | 301 | 300,00 | 247,43 | 352,57 |
| 4 | 351 | 301,50 | 248,93 | 354,07 |
| 5 | 336 | 326,00 | 273,43 | 378,57 |
| 6 | 361 | 343,50 | 290,93 | 396,07 |
| 7 | 407 | 348,50 | 295,93 | 401,07 |
| 8 | 351 | 384,00 | 331,43 | 436,57 |
| 9 | 357 | 379,00 | 326,43 | 431,57 |
| 10 | 346 | 354,00 | 301,43 | 406,57 |
| 11 | 356 | 351,50 | 298,93 | 404,07 |
| 12 | 371 | 351,00 | 298,43 | 403,57 |
| 13 | 399 | 363,50 | 310,93 | 416,07 |
| 14 | 392 | 385,00 | 332,43 | 437,57 |
| 15 | 425 | 395,50 | 342,93 | 448,07 |
| 16 | 411 | 408,50 | 355,93 | 461,07 |
| 17 | 455 | 418,00 | 365,43 | 470,57 |
| 18 | 457 | 433,00 | 380,43 | 485,57 |
| 19 | 465 | 456,00 | 403,43 | 508,57 |
| 20 | 481 | 461,00 | 408,43 | 513,57 |
| 21 | | 473,00 | 420,43 | 525,57 |
| 22 | | 477,00 | 424,43 | 529,57 |
| 23 | | 475,00 | 422,43 | 527,57 |

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Intervalos de previsão

Se o objectivo da previsão no que se refere ao horizonte temporal for de médio/longo prazo, o analista deve calcular as **previsões a *h* passos à frente** utilizando exclusivamente a informação disponível da série até ao momento *t*. Neste caso, a medida do EQM passa a ser determinada com base nos erros de previsão a *h* passos, dando lugar à seguinte expressão:

$$EQM_{(h)} = \frac{1}{m-h} \sum_{t=h+1}^{m} \left[Y_t - P_t(h)\right]^2 ,$$

onde $P_t(h)$ é a previsão da série a *h* períodos à frente feita para o momento *t*. O número de termos a incluir no somatório de $EQM_{(h)}$ não pode ser superior ao número de observações da série menos *h*.

Para construir intervalos de previsão a *h* passos à frente (admitindo, como habitualmente, os pressupostos da normalidade dos erros de previsão) devemos utilizar a seguinte expressão:

$$\left(P_{t+h} - z\sqrt{EQM_{(h)}},\, P_{t+h} + z\sqrt{EQM_{(h)}}\right).$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Médias móveis

A **média móvel simples** (MMS) define-se como a média aritmética das $k$ observações (com $k$ inteiro e ímpar) centradas no instante $t$:

$$MMS_t = \frac{1}{k}\left(Y_{t-m} + Y_{t-m+1} + \cdots + Y_t + \cdots + Y_{t+m-1} + Y_{t+m}\right), \quad m = (k-1)/2.$$

Pode obter-se uma média móvel a partir de outra média móvel, designada por **média móvel dupla**. Esta obtém-se a partir de um número par de termos, através da expressão:

$$\begin{aligned} MMD_t &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}\left(Y_{t-m} + \cdots + Y_t + \cdots + Y_{t+m-1}\right) + \frac{1}{k}\left(Y_{t-m+1} + \cdots + Y_t + \cdots + Y_{t+m}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2k}\left(Y_{t-m} + 2Y_{t-m+1} + \cdots + 2Y_t + \cdots + 2Y_{t+m-1} + Y_{t+m}\right), \quad m = k/2, \end{aligned}$$

onde $k$ é um número (inteiro e par) que representa a ordem da média móvel. Por exemplo, a média móvel dupla de ordem 2 envolve o cálculo da média de duas médias simples de 2 observações:

$$\begin{aligned} MMD\,2_t &= \frac{1}{2}\left(\frac{Y_{t-1} + Y_t}{2} + \frac{Y_t + Y_{t+1}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(Y_{t-1} + 2Y_t + Y_{t+1}\right). \end{aligned}$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Médias móveis

Podemos ainda definir um método de **médias móveis ponderadas**, atribuindo ponderadores às observações da série numa sua vizinhança, através da expressão:

$$\begin{aligned} MMP_t &= c_{-m}Y_{t-m} + c_{-m+1}Y_{t-m+1} + \cdots + c_0 Y_t + \cdots + c_{m-1}Y_{t+m-1} + c_m Y_{t+m} \\ &= \sum_{j=-m}^{m} c_j Y_{t+j}, \quad m = (k-1)/2 \end{aligned}$$

Para proceder ao adequado alisamento da série, devemos dar pesos simétricos a cada observação, $c_j = c_{-j}$, e fazer com que sua soma seja igual a um, $\sum_{j=-m}^{m} c_j = 1$. Por exemplo, Makridakis, Wheelwright e Hyndman (1998) proposeram uma média móvel centrada de ordem 12 com pesos simétricos e iguais a $c_{-6} = c_6 = 0{,}0416$ e $c_{-5} = \cdots = c_0 = \cdots = c_5 = 0{,}0833$,

$$MMP_t = 0{,}0416Y_{t-6} + 0{,}0833Y_{t-5} + \cdots + 0{,}0833Y_t + \cdots + 0{,}0833Y_{t+5} + 0{,}0416Y_{t+6}$$

Em **previsão**, podemos dar maior importância à informação passada mais recente relativamente à mais antiga e utilizar a seguinte função de previsão:

$$P_{t+h} = c_1 Y_t + c_2 Y_{t-1} + \cdots + c_k Y_{t-k+1}, \quad h = 1,2,\ldots$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Médias móveis

EViews

File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help

```
scalar reqm_pmm7=@rmse(shampoo,pmm7)
scalar eqm_pmm7=reqm_pmm7*reqm_pmm7
scalar eam_pmm7=@mae(shampoo,pmm7)
scalar epam_pmm7=@mape(shampoo,pmm7)
genr pmm2=@movav(shampoo(-1),2)
genr pmm6=@movav(shampoo(-1),6)
```

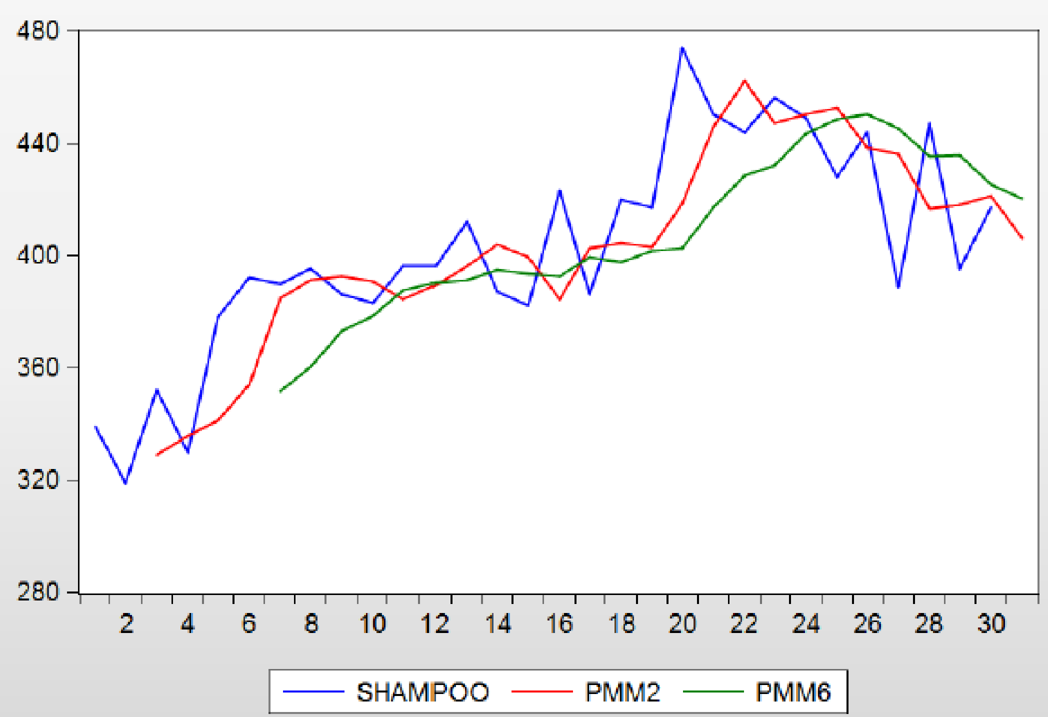
Group: UNTITLED Workfile: DADOSCURSO_BNA2011::shamp...

View Proc Object Print Name Freeze Default Sort Transpose Edit

| obs | SHAMPOO | PMM2 | PMM6 |
|---|---|---|---|
| 1 | 339.0000 | NA | NA |
| 2 | 319.0000 | NA | NA |
| 3 | 352.0000 | 329.0000 | NA |
| 4 | 330.0000 | 335.5000 | NA |
| 5 | 378.0000 | 341.0000 | NA |
| 6 | 392.0000 | 354.0000 | NA |
| 7 | 390.0000 | 385.0000 | 351.6667 |
| 8 | 395.0000 | 391.0000 | 360.1667 |
| 9 | 386.0000 | 392.5000 | 372.8333 |
| 10 | 383.0000 | 390.5000 | 378.5000 |
| 11 | 396.0000 | 384.5000 | 387.3333 |
| 12 | 396.0000 | 389.5000 | 390.3333 |
| 13 | 412.0000 | 396.0000 | 391.0000 |
| 14 | 387.0000 | 404.0000 | 394.6667 |
| 15 | 382.0000 | 399.5000 | 393.3333 |
| 16 | 423.0000 | 384.5000 | 392.6667 |
| 17 | 386.0000 | 402.5000 | 399.3333 |
| 18 | 420.0000 | 404.5000 | 397.6667 |
| 19 | 417.0000 | 403.0000 | 401.6667 |
| 20 | 474.0000 | 418.5000 | 402.5000 |
| 21 | 450.0000 | 445.5000 | 417.0000 |
| 22 | 444.0000 | 462.0000 | 428.3333 |
| 23 | 456.0000 | 447.0000 | 431.8333 |
| 24 | 449.0000 | 450.0000 | 443.5000 |
| 25 | 428.0000 | 452.5000 | 448.3333 |

Graph: GRAPH01 Workfile: DADOSCURSO_BNA2011::shampoo\

View Proc Object Print Name Freeze Options Update AddText Line/Shade Remove Template Zoom




Path = h:\formação\eviews\introdução ao eviews DB = progdemo WF = dadoscurso_bna2011

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

Muitas séries de vendas exibem movimentos de carácter sazonal (mensal, trimestral ou mesmo semestral). São exemplos as vendas de águas minerais, as vendas de cerveja, a procura hoteleira e o número de passageiros aéreos. Nestes casos, podemos estar interessados em estimar os factores sazonais e, a partir destes, proceder à dessazonalização (remoção da sazonalidade) da série observada para depois estudá-la melhor nas suas outras características. Os principais métodos de ajustamento de sazonalidade são o método de decomposição, o Census X-11 ARIMA e o Census X-12 ARIMA. No nosso trabalho, por simplificação de exposição, vamos abordar apenas o método de decomposição, nas suas vertentes multiplicativa e aditiva. Para conhecer os métodos do Census, desenvolvidos pelo U.S. Bureau of the Census, consulte, por exemplo, Makridakis, Wheelwright e Hyndman (1998, p.113-121).

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

Quando a amplitude das oscilações sazonais aumenta ou diminui com o andamento da série, pode empregar-se o **método de decomposição multiplicativo**. Seja $Y_t$ a série das vendas e $Y_t^D$ a série dessazonalizada. Os passos a dar são os seguintes:

**Passo 1.** Proceder ao alisamento da série $Y_t$ calculando as médias móveis duplas ou centradas,

$$M_t = \begin{cases} (0{,}5Y_{t-6} + Y_{t-5} + \cdots + Y_t + \cdots + Y_{t+5} + 0{,}5Y_{t+6})/12 \text{ se mensal} \\ (0{,}5Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + 0{,}5Y_{t+2})/4 \text{ se trimestral} \\ (0{,}5Y_{t-1} + Y_{t-1} + 0{,}5Y_{t+1})/2 \text{ se semestral} \end{cases}$$

**Passo 2.** Calcular o rácio entre a série original ($Y_t$) e a série alisada ($M_t$),

$$R_t = \frac{Y_t}{M_t} = \frac{T_t \times C_t \times S_t \times E_t}{T_t \times C_t} = S_t \times E_t ,$$

o que equivale a remover da série a componente tendência-cíclica, deixando isolado o produto das componentes sazonal e irregular.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

**Passo 3.** Estimar os índices sazonais ($I_t$) através das médias dos termos de $R_t$ correspondentes a cada mês, trimestre ou semestre, assumido que a componente sazonal é constante de ano para ano. Em seguida, calcular os **factores sazonais** ($S_t$) com base nos quocientes entre os índices sazonais e a sua média geométrica,

$$S_t = \begin{cases} I_t / \sqrt[12]{I_1 I_2 \cdots I_{12}} & \text{semensal} \\ I_t / \sqrt[4]{I_1 I_2 I_3 I_4} & \text{se trimestral} \\ I_t / \sqrt[2]{I_1 I_2} & \text{se semestral} \end{cases}$$

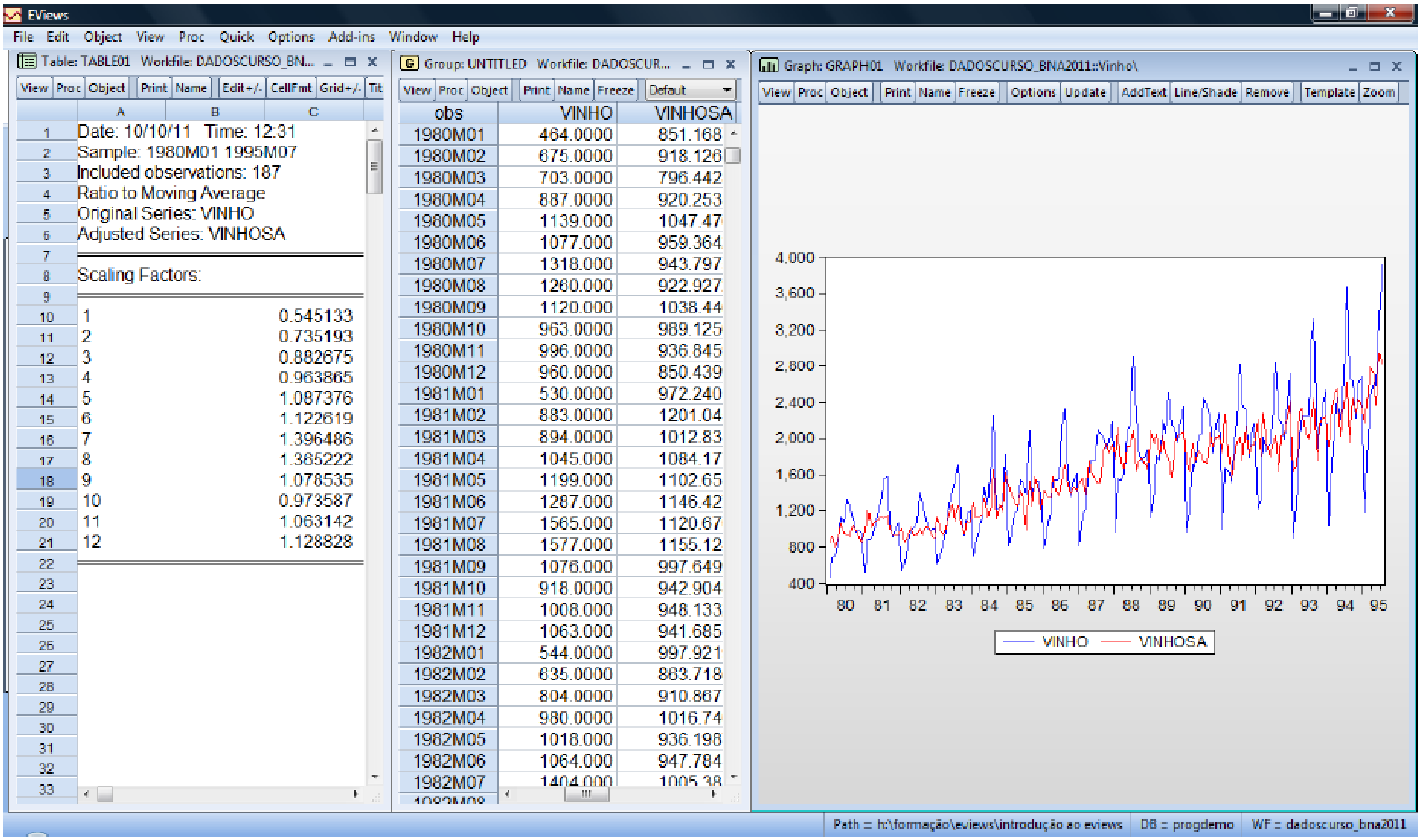
**Passo 4.** Por último, construir a série dessazonalizada, dividindo os valores da série original pelos respectivos factores sazonais,

$$Y_t^D = \frac{Y_t}{S_t}.$$

Deste modo, já é possível isolar a **componente irregular** do modelo, dividindo a série observada pelas componentes tendência-cíclica e sazonal, como se segue,

$$E_t = \frac{Y_t}{T_t \times C_t \times S_t}.$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

No caso em que os movimentos sazonais não aumentam ou diminuem com o nível da série, podemos utilizar o **método de decomposição aditivo** para remover a sazonalidade dos dados da série. Este método consiste nos seguintes passos:

**Passo1.** Obter as médias móveis duplas ou centradas de $Y_t$ através da expressão (igual ao modelo multiplicativo),

$$M_t = \begin{cases} (0.5Y_{t-6} + Y_{t-5} + \cdots + Y_t + \cdots + Y_{t+5} + 0.5Y_{t+6})/12 & \text{semensal} \\ (0.5Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + 0.5Y_{t+2})/4 & \text{se trimestral} \\ (0.5Y_{t-1} + Y_{t-1} + 0.5Y_{t+1})/2 & \text{se semestral} \end{cases}$$

**Passo 2.** Calcular a diferença entre a série original e a série alisada,

$$D_t = Y_t - M_t \,,$$

o que equivale a eliminar os movimentos de tendência e cíclicos, isto é, $D_t = Y_t - (T_t + C_t) = S_t + E_t$.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

**Passo 3.** Estimar os índices sazonais, $I_t$, através das médias dos termos de $D_t$ correspondentes a cada mês, trimestre ou semestre. Em seguida, calcular os **factores sazonais**, $S_t$, com base nas diferenças entre os respectivos índices sazonais e a sua média aritmética,

$$S_t = \begin{cases} I_t\text{-}(I_1 + I_2 + \cdots + I_{12})/12 & \text{se mensal} \\ I_t\text{-}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/4 & \text{se trimestral} \\ I_t\text{-}(I_1 + I_2)/2 & \text{se semestral} \end{cases}$$

**Passo 4.** Construir a série dessazonalizada, subtraindo à série original os respectivos factores sazonais,

$$Y_t^D = Y_t - S_t,$$

Deste modo, podemos obter também uma estimativa da **componente irregular**, $E_t = Y_t - (T_t + C_t + S_t)$.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

A componente cíclica pode ser extraída do modelo de decomposição depois de isoladas as componentes de tendência, sazonal e irregular. Sendo $Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times E_t$ o método de decomposição multiplicativo, podemos começar por dividir a série observada pela **componente de tendência**, isto é:

$$\frac{Y_t}{T_t} = \frac{T_t \times S_t \times C_t \times E_t}{T_t} = S_t \times C_t \times E_t \,,$$

onde $T_t$ é estimado através de um modelo de tendência linear do tipo $\hat{Y}_t = b_1 + b_2 t$, com $b_1$ o termo independente e $b_2$ o declive de tendência. Estas grandezas são calculadas através das expressões:

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \sum_{t=1}^{n} t}{\sum_{t=1}^{n} t^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^{n} t \right)^2}$$

e

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t - b_2 \times \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} t \,.$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

. Em seguida, removem-se os factores sazonais através do método de decomposição sazonal estudado na secção anterior, o que conduz a:

$$\frac{Y_t}{T_t \times S_t} = \frac{T_t \times S_t \times C_t \times E_t}{T_t \times S_t} = C_t \times E_t = X_t \,.$$

Por último, a eliminação da **componente irregular (ou aleatória)** da série é feita através do cálculo de médias centradas de ordem igual ao período sazonal (12 se mensal, 4 se trimestral, 2 se semestral), como se segue:

$$M_t^{(C)} = \begin{cases} \left(0{,}5X_{t-6} + X_{t-5} + \cdots + X_t + \cdots + X_{t+5} + 0{,}5X_{t+6}\right)/12 & \text{se mensal} \\ \left(0{,}5X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + 0{,}5X_{t+2}\right)/4 & \text{se trimestral} \\ \left(0{,}5X_{t-1} + X_{t-1} + 0{,}5X_{t+1}\right)/2 & \text{se semestral} \end{cases}$$

E assim, consegue-se finalmente isolar a **componente cíclica**,

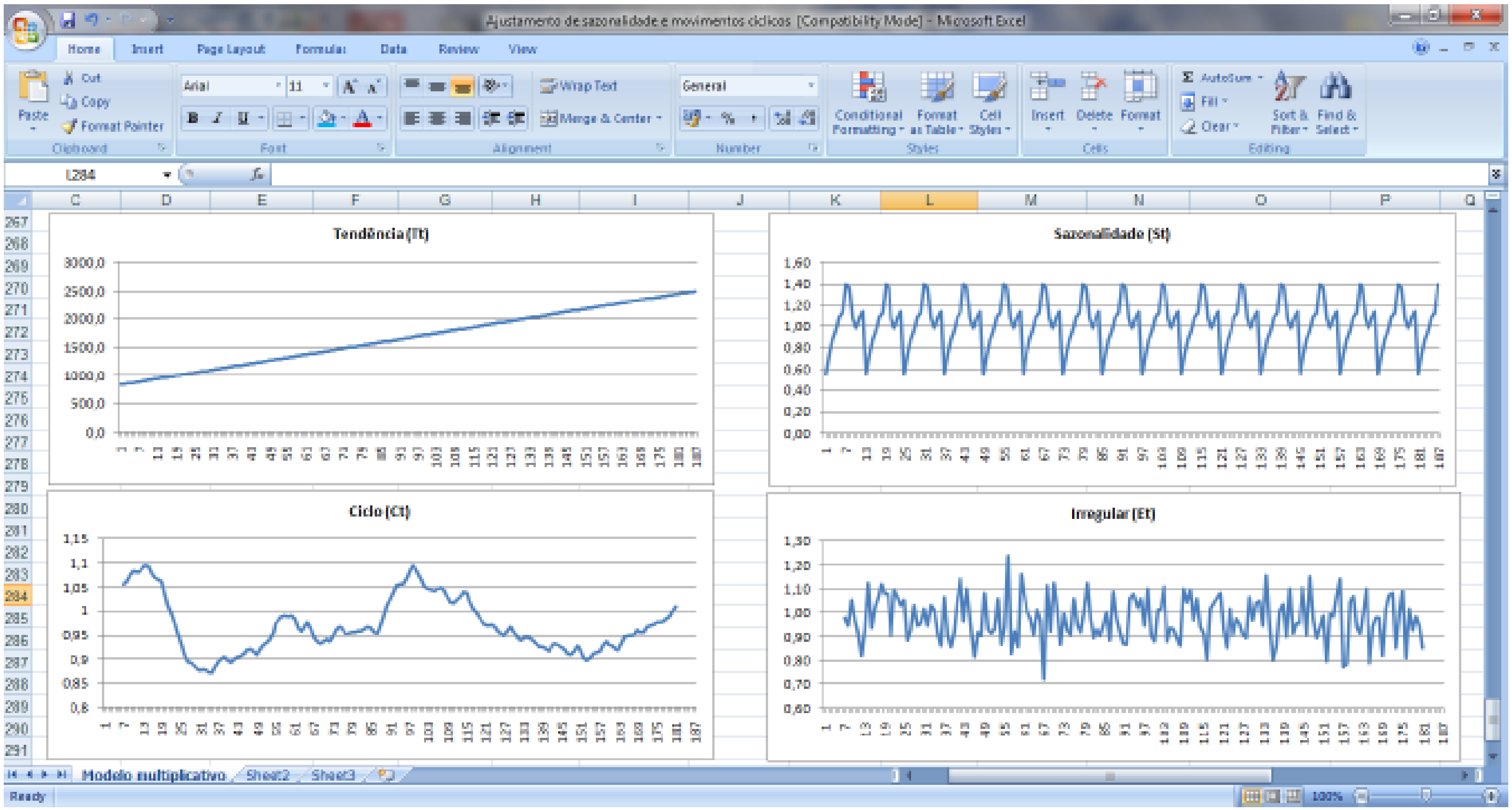
$$\frac{Y_t}{T_t \times S_t \times E_t} = \frac{T_t \times S_t \times C_t \times E_t}{T_t \times S_t \times E_t} = C_t = M_t^{(C)} \,.$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos

Ajustamento de sazonalidade. Modelo multiplicativo: Yt=Tt×Ct×St×Et — Ajustamento de movimentos cíclicos

| t | Vinho Yt | MM12 Tt*Ct | Yt/(Tt×Ct) Rt=St×Et | Rt×100 | St | St×100 | Yt/St | Yt/(Tt×Ct×St) Et | Et×100 | MTL Tt | Yt/Tt Ct×St×Et | Yt/(Tt×St) Ct×Et | MM12 Ct (Alis.) | Yt/(Tt×St×Et) Ct |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 464 | | | | 0,55 | 54,5 | 850,8 | | | 833,3 | 0,56 | 1,02 | | |
| 2 | 675 | | | | 0,73 | 73,3 | 920,8 | | | 842,2 | 0,80 | 1,09 | | |
| 3 | 703 | | | | 0,88 | 87,9 | 799,7 | | | 851,2 | 0,83 | 0,94 | | |
| 4 | 887 | | | | 0,96 | 96,1 | 923,2 | | | 860,1 | 1,03 | 1,07 | | |
| 5 | 1139 | | | | 1,09 | 108,6 | 1049,0 | | | 869,0 | 1,31 | 1,21 | | |
| 6 | 1077 | | | | 1,12 | 112,3 | 959,0 | | | 878,0 | 1,23 | 1,09 | | |
| 7 | 1318 | 966,3 | 1,36 | 136,40 | 1,40 | 139,6 | 944,4 | 0,98 | 97,74 | 886,9 | 1,49 | 1,06 | 1,06 | 1,09 |
| 8 | 1260 | 977,7 | 1,29 | 128,88 | 1,36 | 136,0 | 926,4 | 0,95 | 94,75 | 895,8 | 1,41 | 1,03 | 1,06 | 1,09 |
| 9 | 1120 | 994,3 | 1,13 | 112,64 | 1,07 | 107,1 | 1045,6 | 1,05 | 105,16 | 904,8 | 1,24 | 1,16 | 1,08 | 1,10 |
| 10 | 963 | 1008,8 | 0,95 | 95,46 | 0,98 | 98,4 | 978,4 | 0,97 | 96,98 | 913,7 | 1,05 | 1,07 | 1,08 | 1,10 |
| 11 | 996 | 1017,9 | 0,98 | 97,85 | 1,07 | 107,1 | 930,0 | 0,91 | 91,36 | 922,6 | 1,08 | 1,01 | 1,08 | 1,10 |
| 12 | 960 | 1029,2 | 0,93 | 93,28 | 1,13 | 113,3 | 847,1 | 0,82 | 82,31 | 931,6 | 1,03 | 0,91 | 1,08 | 1,10 |
| 13 | 530 | 1048,2 | 0,51 | 50,56 | 0,55 | 54,5 | 971,8 | 0,93 | 92,71 | 940,5 | 0,56 | 1,03 | 1,09 | 1,11 |
| 14 | 883 | 1071,7 | 0,82 | 82,39 | 0,73 | 73,3 | 1204,6 | 1,12 | 112,40 | 949,4 | 0,93 | 1,27 | 1,10 | 1,13 |
| 15 | 894 | 1083,1 | 0,83 | 82,54 | 0,88 | 87,9 | 1017,0 | 0,94 | 93,90 | 958,4 | 0,93 | 1,06 | 1,09 | 1,13 |
| 16 | 1045 | 1066,8 | 0,98 | 97,96 | 0,96 | 96,1 | 1087,7 | 1,02 | 101,96 | 967,3 | 1,08 | 1,12 | 1,08 | 1,10 |
| 17 | 1199 | 1040,8 | 1,15 | 115,20 | 1,09 | 108,6 | 1104,2 | 1,06 | 106,09 | 976,2 | 1,23 | 1,13 | 1,07 | 1,07 |
| 18 | 1287 | 1024,1 | 1,26 | 125,67 | 1,12 | 112,3 | 1146,0 | 1,12 | 111,91 | 985,2 | 1,31 | 1,16 | 1,07 | 1,04 |
| 19 | 1565 | 1037,4 | 1,51 | 150,86 | 1,40 | 139,6 | 1121,4 | 1,08 | 108,10 | 994,1 | 1,57 | 1,13 | 1,06 | 1,04 |

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Ajustamento de sazonalidade e movimentos cíclicos



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Efeitos de calendário

O **ajustamento *length-of-month*** consiste em transformar os dados da série mensal de acordo com o número de dias do respectivo mês:

$$Y_t^{[m]} = Y_t \times \frac{\overline{nd}}{nd_t},$$

onde $\overline{nd}$ é o número de dias, em média, por mês (365,25 dias/12 meses = 30,4375), e $nd_t$ o número de dias do mês $t$.

O **ajustamento *4 vs. 5 week periods*** consiste em corrigir os dados da série mensal de acordo com o número de fins-de-semana (Sábados e/ou Domingos) de cada mês:

$$Y_t^{[s]} = Y_t \times \frac{\overline{ns}}{ns_t},$$

onde $\overline{ns}$ é o número de fins-de-semana, em média, por mês (52,18 semanas/12 meses = 4,348), e $ns_t$ o número de fins-de-semanas do mês $t$.

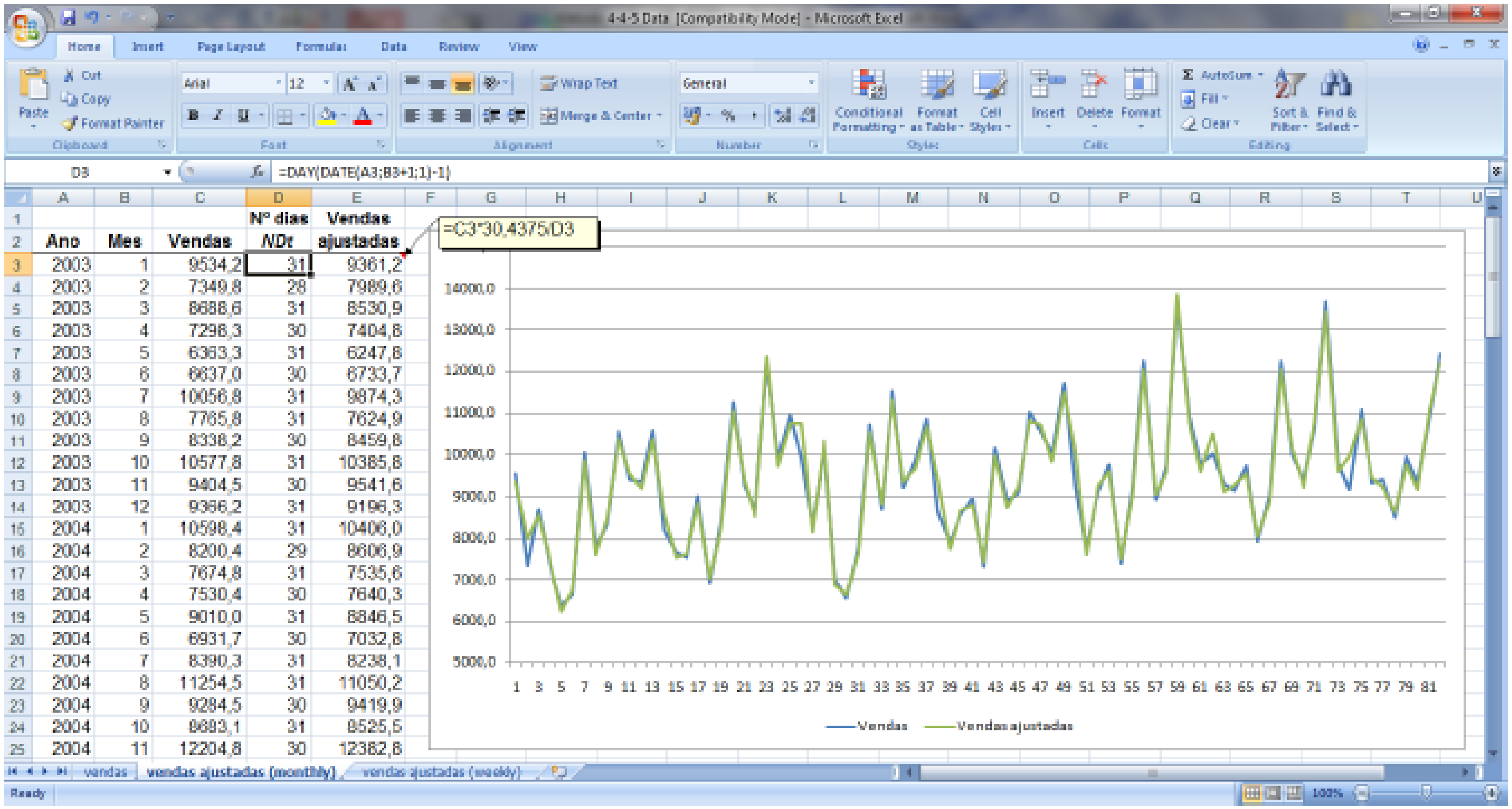
No ***trading day adjustment***, os dias são classificados em dias úteis (*trading days*) ou em dias não úteis (*non-trading days*), e os dados da série original são transformados de acordo com o número de dias úteis de cada mês/semana:

$$Y_t^{[d]} = Y_t \times \frac{\overline{ndu}}{ndu_t},$$

onde $\overline{ndu}$ é o número de dias úteis, em média, por mês/semana, e $ndu_t$ o número de dias úteis do mês/semana $t$.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Efeitos de calendário

Vendas ajustadas de efeitos de calendário (*month adjustment*)



| Ano | Mes | Vendas | Nº dias NDt | Vendas ajustadas |
|---|---|---|---|---|
| 2003 | 1 | 9534,2 | 31 | 9361,2 |
| 2003 | 2 | 7349,8 | 28 | 7989,6 |
| 2003 | 3 | 8688,6 | 31 | 8530,9 |
| 2003 | 4 | 7298,3 | 30 | 7404,8 |
| 2003 | 5 | 6363,3 | 31 | 6247,8 |
| 2003 | 6 | 6637,0 | 30 | 6733,7 |
| 2003 | 7 | 10056,8 | 31 | 9874,3 |
| 2003 | 8 | 7765,8 | 31 | 7624,9 |
| 2003 | 9 | 8338,2 | 30 | 8459,8 |
| 2003 | 10 | 10577,8 | 31 | 10385,8 |
| 2003 | 11 | 9404,5 | 30 | 9541,6 |
| 2003 | 12 | 9366,2 | 31 | 9196,3 |
| 2004 | 1 | 10598,4 | 31 | 10406,0 |
| 2004 | 2 | 8200,4 | 29 | 8606,9 |
| 2004 | 3 | 7674,8 | 31 | 7535,6 |
| 2004 | 4 | 7530,4 | 30 | 7640,3 |
| 2004 | 5 | 9010,0 | 31 | 8846,5 |
| 2004 | 6 | 6931,7 | 30 | 7032,8 |
| 2004 | 7 | 8390,3 | 31 | 8238,1 |
| 2004 | 8 | 11254,5 | 31 | 11050,2 |
| 2004 | 9 | 9284,5 | 30 | 9419,9 |
| 2004 | 10 | 8683,1 | 31 | 8525,5 |
| 2004 | 11 | 12204,8 | 30 | 12382,8 |

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Efeitos de calendário

Ajustamento das vendas pelo método 4 *vs. 5 weeks adjustment*

4-4-5 Data [Compatibility Mode] - Microsoft Excel

E85 =(C86-C85)-NETWORKDAYS(C85;C86)+1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1–3 | Ano | Mes | Data | Vendas | Nº de Sábados ou Domingos | Nº de fins-de-semana incompletos (Sábado ou Domingo) | Nº de fins-de-semana completos (Sábado e Domingo) | Vendas ajustadas fins-de-sem. incompletos (Sábado ou Domingo) | Vendas ajustadas fins-de-sem. completos (Sábado e Domingo) |
| 80 | 2009 | 5 | 01-06-2009 | 9405,8 | 8 | 4,0 | 4 | 10224,1 | 10224,1 |
| 81 | 2009 | 6 | 01-07-2009 | 8498,1 | 9 | 4,5 | 4 | 8211,1 | 9237,4 |
| 82 | 2009 | 7 | 01-08-2009 | 9936,6 | 10 | 5,0 | 5 | 8640,9 | 8640,9 |
| 83 | 2009 | 8 | 01-09-2009 | 9343,8 | 8 | 4,0 | 4 | 10156,7 | 10156,7 |
| 84 | 2009 | 9 | 01-10-2009 | 10933,6 | 10 | 5,0 | 5 | 9507,9 | 9507,9 |
| 85 | 2009 | 10 | 01-11-2009 | 12438,9 | 9 | 4,5 | 4 | 12018,7 | 13521,[illegible] |
| 86 | 2009 | 11 | 01-12-2009 | | | | | | |
| 87 | 2009 | 12 | 01-01-2010 | | | | | | |
| 88 | 2010 | 1 | 01-02-2010 | | | | | | |
| 89 | 2010 | 2 | 01-03-2010 | | | | | | |
| 90 | 2010 | 3 | 01-04-2010 | | | | | | |
| 91 | 2010 | 4 | 01-05-2010 | | | | | | |
| 92 | 2010 | 5 | 01-06-2010 | | | | | | |
| 93 | 2010 | 6 | 01-07-2010 | | | | | | |
| 94 | 2010 | 7 | 01-08-2010 | | | | | | |
| 95 | 2010 | 8 | 01-09-2010 | | | | | | |
| 96 | 2010 | 9 | 01-10-2010 | | | | | | |
| 97 | 2010 | 10 | 01-11-2010 | | | | | | |
| 98 | 2010 | 11 | 01-12-2010 | | | | | | |
| 99 | 2010 | 12 | 01-01-2011 | | | | | | |

E85: =SUM(INT((C86-{1;7})/7)-INT((C85-{1;7}-1)/7)) ou =(C86-C85)-NETWORKDAYS(C85;C86)+1

F85: =SUM(INT((C86-{1;7})/7)-INT((C85-{1;7}-1)/7))/2 ou =((C86-C85)-NETWORKDAYS(C85;C86)+1)/2 ou =E85/2

G85: =INT((SUM(INT((C86-{1;7})/7)-INT((C85-{1;7}-1)/7))-(WEEKDAY(C85)=1))/2)

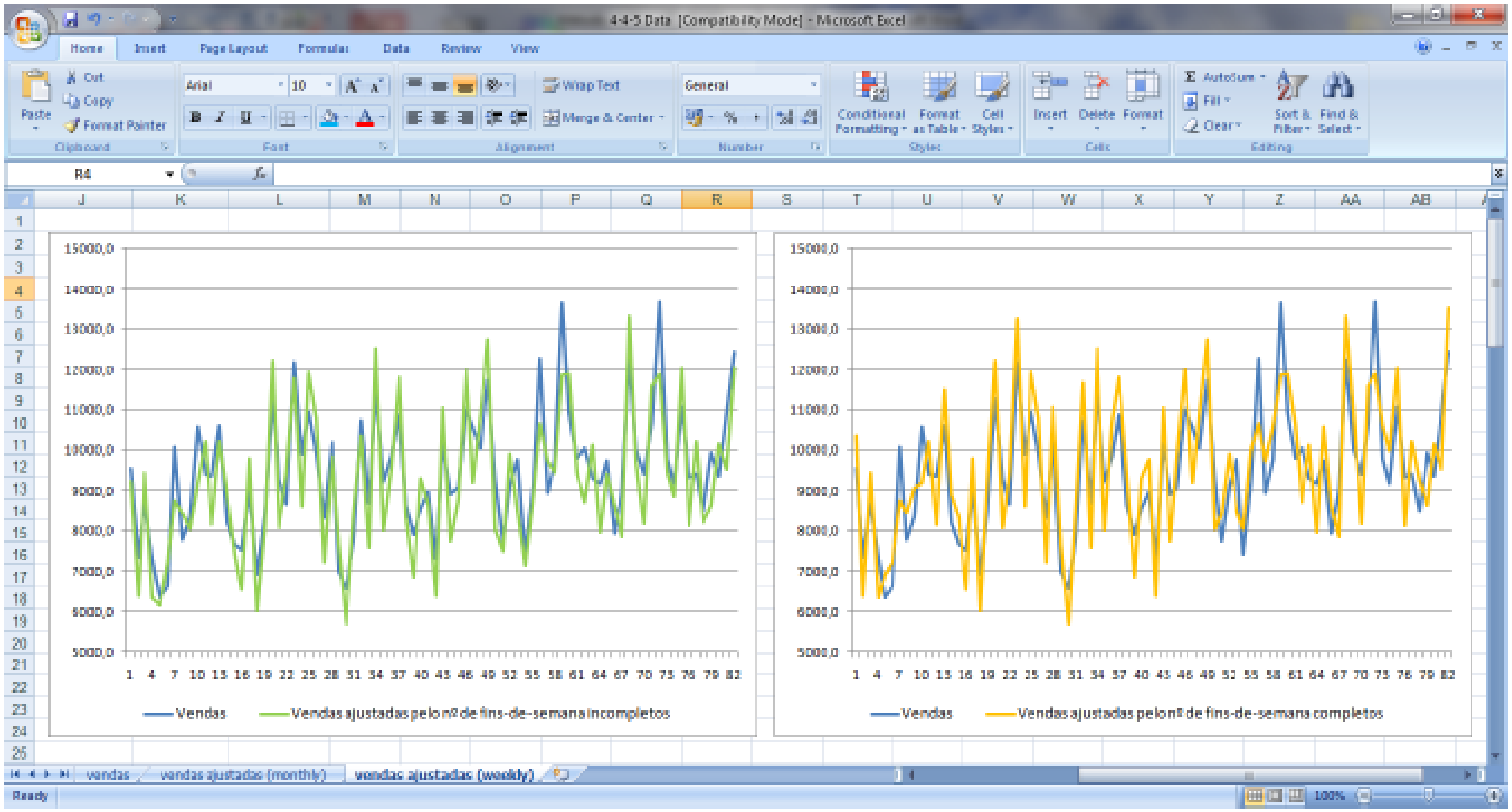
H85: =D85*4,348/F85

I85: =D85*4,348/G85

vendas | vendas ajustadas (monthly) | vendas ajustadas (weekly)

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Efeitos de calendário

Vendas ajustadas pelo n.º de fins-de-semana incompletos e completos



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Alisamento exponencial simples

Considere-se uma série de dados observados até ao instante $t$–1 e que se pretende obter uma previsão pontual para o instante $t$. Seja $Y_t$ o valor da série no instante $t$ e $P_t$ a previsão obtida no mesmo instante. Quando for conhecida a observação $Y_t$, o erro de previsão vem dado por $Y_t - P_t$. Para obter as estimativas dos valores futuros da série, o método de alisamento exponencial simples utiliza a previsão do último instante ajustada pelo respectivo erro de previsão, através da expressão:

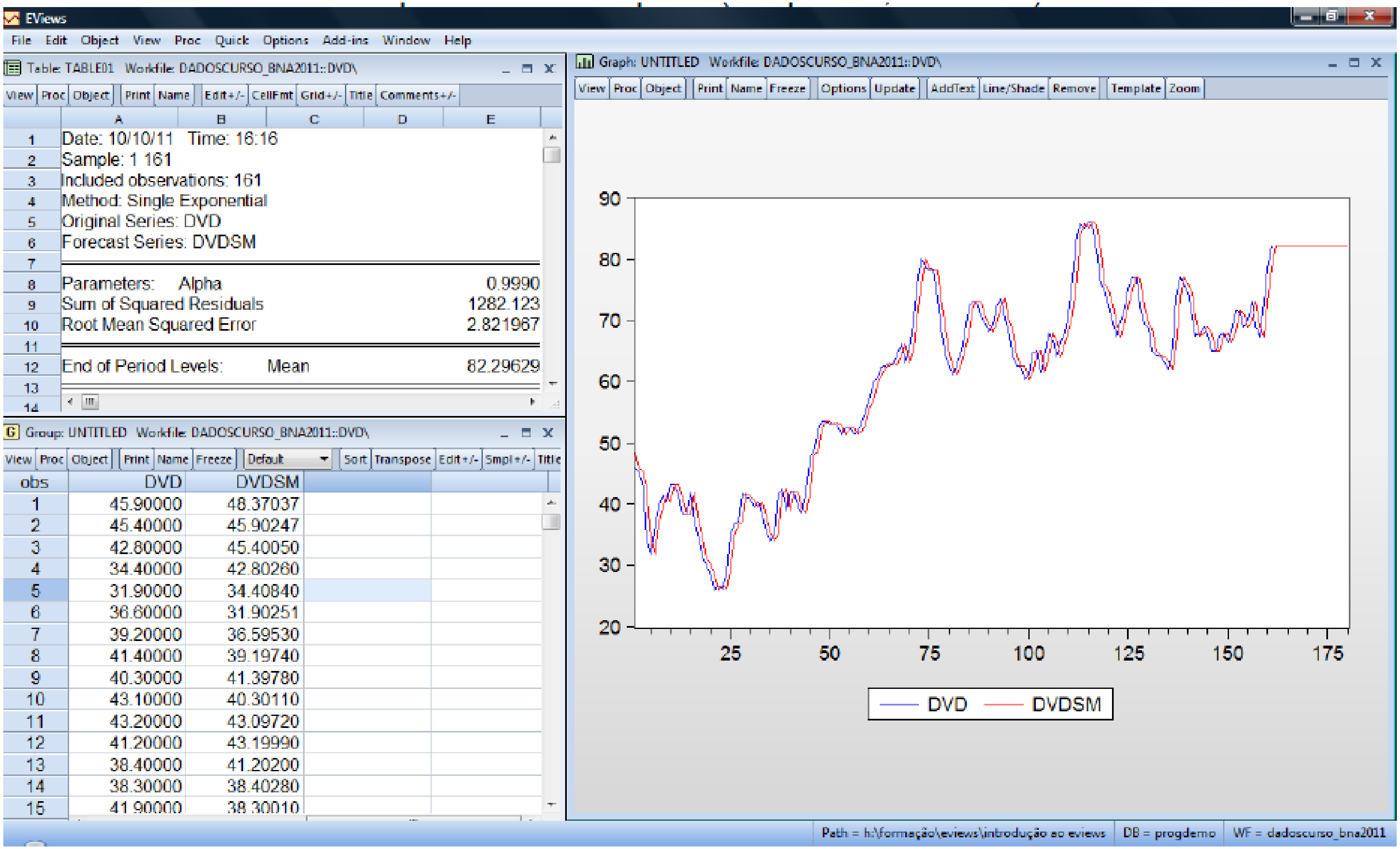
$$P_{t+1} = P_t + \alpha(Y_t - P_t),$$

onde $\alpha$ é uma constante de amortecimento ou alisamento que varia entre 0 e 1.

Dado que o método de alisamento simples utiliza apenas o último valor observado e a previsão para esse instante, as previsões para horizontes maiores são constantes para todo o horizonte temporal, isto é:

$$P_{t+h} = P_t,\; h = 1,2,\ldots$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Alisamento exponencial simples



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Alisamento exponencial duplo

O modelo de alisamento exponencial duplo é apropriado para séries temporais que apresentam tendência linear e consiste na aplicação do método de alisamento exponencial simples duas vezes, utilizando a mesma constante de alisamento. Para proceder ao alisamento duplo de uma série utilizam-se as seguintes equações de actualização:

$$M_t = \alpha Y_t + (1-\alpha) M_{t-1}$$

$$D_t = \alpha M_t + (1-\alpha) D_{t-1},$$

As previsões com horizonte temporal de $h$ passos à frente são obtidas através da expressão:

$$P_{t+h} = a(t) + b(t) \times h,\ \ h = 1,2,\dots\ .$$

onde $a(t) = 2M_t - D_t$ e $b(T) = (M_t - D_t)\left[\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)}\right]$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Alisamento exponencial duplo

**1) Método das médias.** Estimar o declive da série através da expressão,

$$b(1)=\frac{\overline{Y}_2-\overline{Y}_1}{k},$$

onde $\overline{Y}_1$ consiste na média das primeiras $k$ observações da série e $\overline{Y}_2$ a média das $k$ observações seguintes, e utilizar este declive para obter a estimativa do nível da série usando a expressão,

$$a(1)=\overline{Y}_1-b(1)\times\frac{k+1}{2}$$

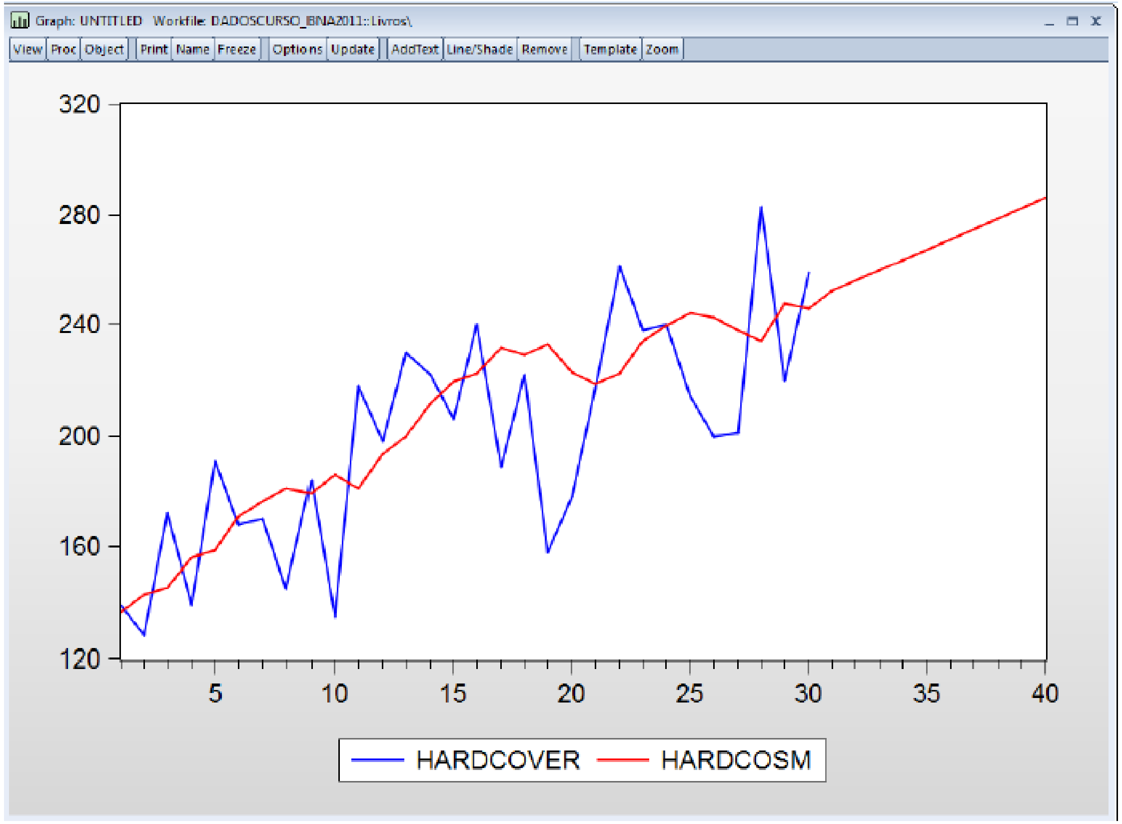
**2) Método da regressão.** Efectuar a regressão linear das primeiras $k$ observações da série, utilizando como variável independente o tempo ($t$), o que equivale a ajustar a equação da recta

$$\hat{Y}_t=a(1)+b(1)t\ ,$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Alisamento exponencial duplo

Date: 10/10/11 Time: 16:37
Sample: 1 30
Included observations: 30
Method: Double Exponential
Original Series: HARDCOVER
Forecast Series: HARDCOSM

| | | |
|---|---|---|
| Parameters: | Alpha | 0.1020 |
| Sum of Squared Residuals | | 27595.44 |
| Root Mean Squared Error | | 30.32900 |
| End of Period Levels: | Mean | 248.5509 |
| | Trend | 3.776153 |



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt

O método de Holt é adequado a séries com tendência linear e sem movimentos de carácter sazonal e constitui uma alternativa ao método de alisamento exponencial duplo para estimar o nível e o declive de tendência da série. Este modelo utiliza as seguintes equações de actualização:

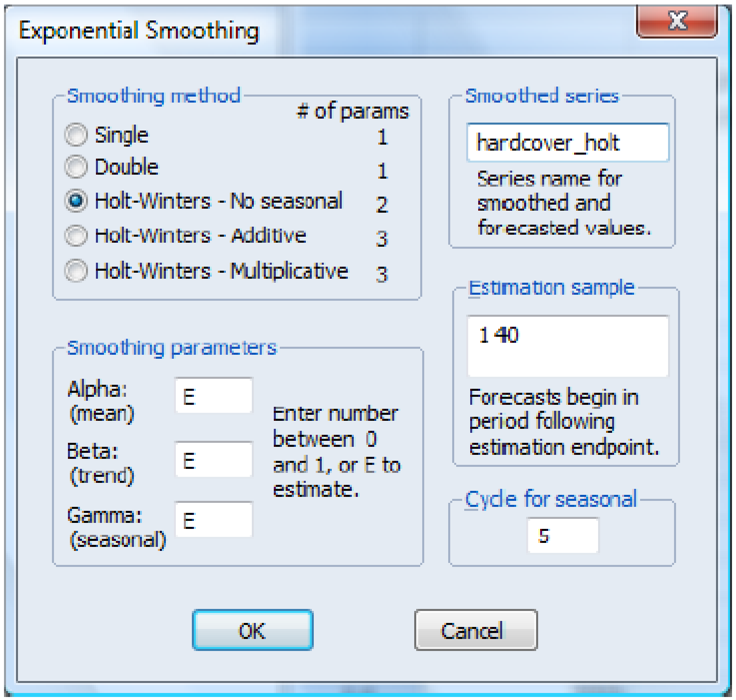
$$a(t) = \alpha Y_t + (1-\alpha)[a(t-1) + b(t-1)] \quad , 0 < \alpha < 1$$

$$b(t) = \beta[a(t) - a(t-1)] + (1-\beta)b(t-1) \quad , 0 < \beta < 1$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são as equações de actualização do nível e do declive da série, respectivamente, e $\alpha$ e $\beta$ são as constantes de alisamento. As previsões a $h$ passos à frente são obtidas através da função:

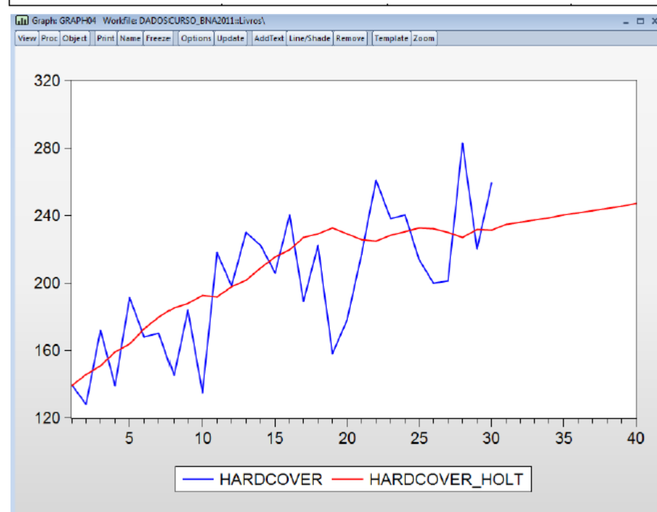
$$P_{t+h} = a(t) + b(t) \times h \ , \ h = 1,2,\ldots \, .$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt




Date: 10/10/11 Time: 19:31
Sample: 1 30
Included observations: 30
Method: Holt-Winters No Seasonal
Original Series: HARDCOVER
Forecast Series: HARDCOVER_HOLT

| | | |
|---|---|---|
| Parameters: | Alpha | 0.0700 |
| | Beta | 0.4900 |
| Sum of Squared Residuals | | 26706.89 |
| Root Mean Squared Error | | 29.83672 |
| End of Period Levels: | Mean | 233.0897 |
| | Trend | 1.386631 |



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt-Winters

O método de Holt-Winters é apropriado para séries que apresentam tendência linear e movimentos sazonais. Na forma **multiplicativa**, o método de Hotl-Winters é definido pelas seguintes equações de actualização:

$$a(t) = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)[a(t-1) + b(t-1)] \quad , 0 < \alpha < 1$$

$$b(t) = \beta[a(t) - a(t-1)] + (1-\beta)b(t-1) \quad , 0 < \beta < 1$$

$$S_t = \gamma \frac{Y_t}{a(t)} + (1-\gamma)S_{t-s} \quad , \ 0 < \gamma < 1,$$

onde $a(t)$, $b(t)$ e $S_t$ representam as expressões do nível, do declive e do índice sazonal, respectivamente; $s$ é o comprimento de sazonalidade, isto é, o número de meses, trimestres ou semestres do ano (12 se mensal, 4 se trimestral, 2 se semestral); e $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são as constantes de alisamento.

As previsões a $h$ passos à frente do método de Holt-Winters multiplicativo são obtidas através da função:

$$P_{t+h} = [a(t) + b(t) \times h] \times S_{t+h-s} \ , \ h = 1,2,\dots \ .$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt-Winters

Tal como os outros métodos de alisamento exponencial, é necessário obter os valores iniciais de $a(t)$, $b(t)$ e também de $S_t$ para arrancar com o algoritmo de Holt-Winters. Assim, para inicializar o nível, calcula-se a média das primeiras $s$ observações,

$$a(s) = (1/s)\sum_{t=1}^{s} Y_t$$

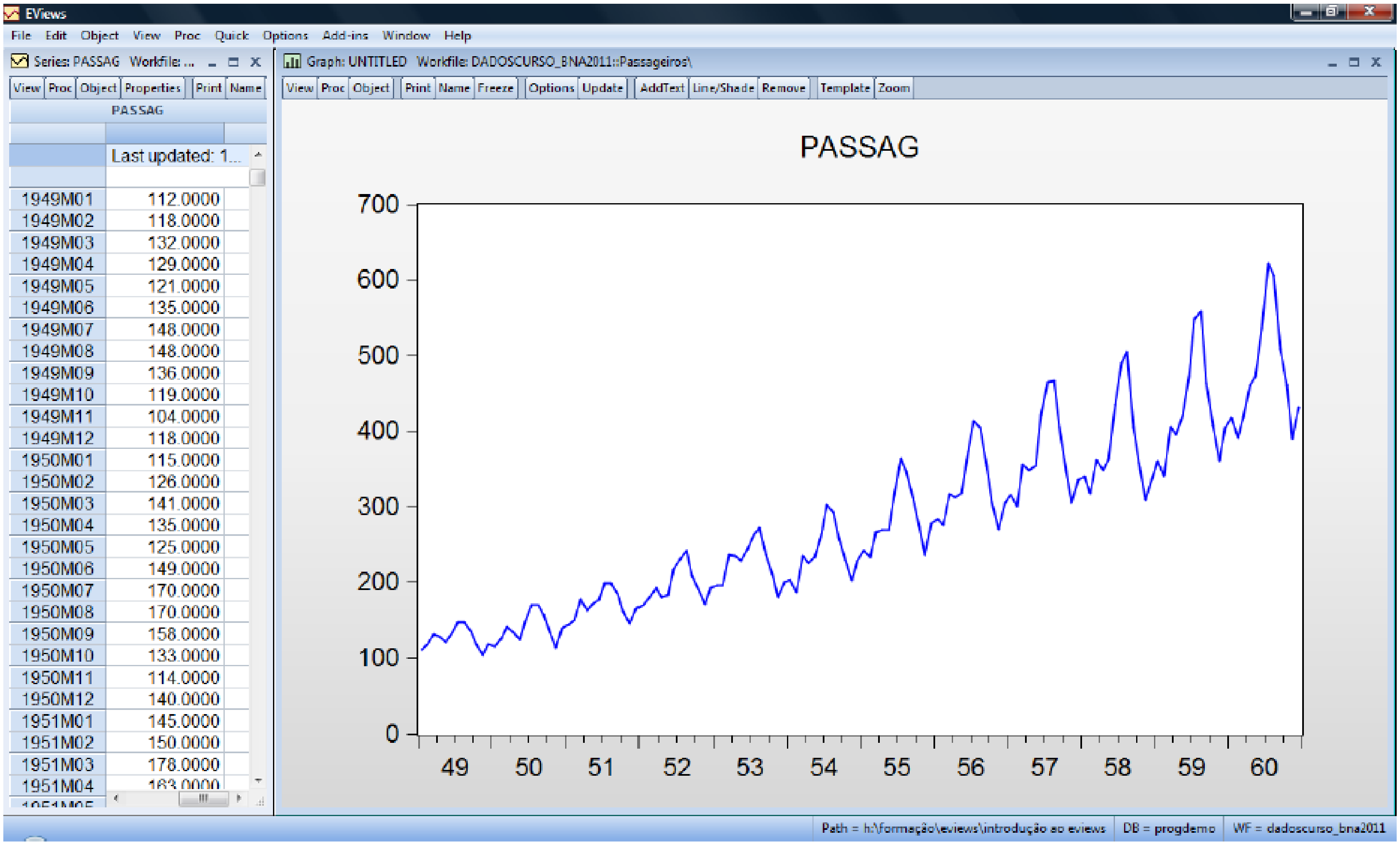
Para inicializar o valor do declive, utiliza-se a expressão

$$b(s) = (1/s^2)\left(\sum_{t=s+1}^{2s} Y_t - \sum_{t=1}^{s} Y_t\right)$$

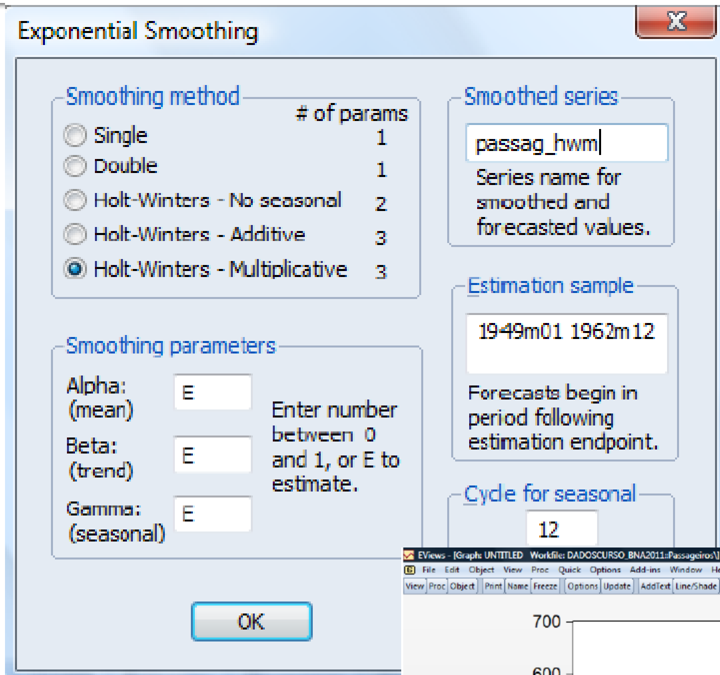
E por último, os primeiros índices sazonais são obtidos por

$$S_1 = Y_1/a(s),\ S_2 = Y_2/a(s), \ldots, S_s = Y_s/a(s)$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt-Winters

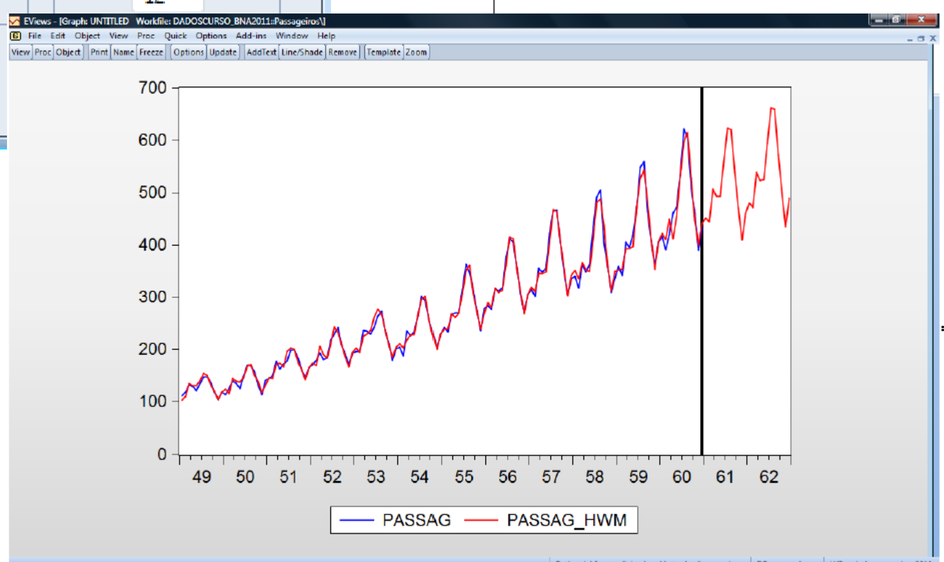


# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt-Winters




Date: 10/10/11 Time: 19:47
Sample: 1949M01 1960M12
Included observations: 144
Method: Holt-Winters Multiplicative Seasonal
Original Series: PASSAG
Forecast Series: PASSAG_HWM

| | | | |
|---|---|---|---|
| Parameters: | Alpha | | 0.8500 |
| | Beta | | 0.0000 |
| | Gamma | | 0.0000 |
| Sum of Squared Residuals | | | 16429.93 |
| Root Mean Squared Error | | | 10.68161 |
| End of Period Levels: | Mean | | 488.6778 |
| | Trend | | 2.647727 |
| | Seasonals: | 1960M01 | 0.917865 |
| | | 1960M02 | 0.897986 |
| | | 1960M03 | 1.020369 |
| | | 1960M04 | 0.986309 |
| | | 1960M05 | 0.982004 |
| | | 1960M06 | 1.107922 |
| | | 1960M07 | 1.228576 |
| | | 1960M08 | 1.215925 |
| | | 1960M09 | 1.050468 |
| | | 1960M10 | 0.914270 |
| | | 1960M11 | 0.791584 |
| | | 1960M12 | 0.886722 |



# Métodos Determinísticos de Previsão
## Método de Holt-Winters

O **método aditivo de Holt-Winters** baseia-se nas seguintes equações de actualização:

$$a(t) = \alpha(Y_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)[a(t-1) + b(t-1)] \quad , 0 < \alpha < 1$$

$$b(t) = \beta[a(t) - a(t-1)] + (1-\beta)b(t-1) \quad , 0 < \beta < 1$$

$$S_t = \gamma[Y_t - a(t)] + (1-\gamma)S_{t-s} \quad , 0 < \gamma < 1$$

As previsões a *h* passos à frente do modelo de sazonalidade aditiva são obtidas através da função:

$$P_{T+h} = a(T) + b(T) \times h + S_{T+h-s} \; , \; h = 1, 2, \dots \, .$$

A inicialização do método de Holt-Winters aditivo é igual ao método multiplicativo, exceptuando os índices sazonais, cujos valores iniciais são obtidos por

$$S_1 = Y_1 - a(s) \, , \; S_2 = Y_2 - a(s) \, , \dots , \; S_s = Y_s - a(s) \, .$$

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Outras formas de alisamento

| Tendência | Sazonalidade: Nula | Sazonalidade: Aditiva | Sazonalidade: Multiplicativa |
|---|---|---|---|
| Nula | $P_{t+h} = a_t$ | $P_{t+h} = a_t + S_{t+h-s}$ | $P_{t+h} = a_t S_{t+h-s}$ |
| Aditiva | $P_{t+h} = a_t + hb_t$ | $P_{t+h} = a_t + hb_t + S_{t+h-s}$ | $P_{t+h} = (a_t + hb_t) S_{t+h-s}$ |
| Aditiva amortecida | $P_{t+h} = a_t + \sum_{i=1}^{h} \phi^i b_t$ | $P_{t+h} = a_t + \sum_{i=1}^{h} \phi^i b_t + S_{t+h-s}$ | $P_{t+h} = \left( a_t + \sum_{i=1}^{h} \phi^i b_t \right) S_{t+h-s}$ |
| Mutiplicativa | $P_{t+h} = a_t b_t^h$ | $P_{t+h} = a_t b_t^h + S_{t+h-s}$ | $P_{t+h} = a_t b_t^h S_{t+h-s}$ |
| Mutiplicativa amortecida | $P_{t+h} = a_t b_t^{\sum_{i=1}^{h} \phi^i}$ | $P_{t+h} = a_t b_t^{\sum_{i=1}^{h} \phi^i} + S_{t+h-s}$ | $P_{t+h} = a_t b_t^{\sum_{i=1}^{h} \phi^i} S_{t+h-s}$ |

**Nota:** $P_t$ representa a previsão para o instante $t$, $a_t$ o nível, $b_t$ a tendência, $S_t$ a sazonalidade, $h$ o horizonte temporal e $\phi$ a constante de amortecimento.

# Métodos Determinísticos de Previsão
## Exercício de aplicação

Com base no ficheiro de EViews “Dados_metodosprevisao.wk1”, na página “Taxas_POR”, efectue as seguintes análises:

**a)** Altere a amostra (sample) para o período de 2003m1 a 2012m4.

**b)** Construa as séries da taxa de inflação homóloga e mensal do sector de lazer (“ipc_lazer”) e represente-as graficamente.

**c)** Extraia, pelo método aditivo, as componente de tendência, cíclica, sazonal e irregular da série de inflação mensal.

**d)** Ajuste aos dados taxa de inflação homóloga o método de alisamento exponencial duplo com $\alpha$=0,1 e $\alpha$ óptimo. Comente as previsões obtidas.

**e)** Ajuste aos dados da taxa de inflação homóloga o método de Holt com $\alpha$=0,15 e $\beta$=0,3 e $\alpha$ e $\beta$ óptimos. Comente as previsões obtidas.

**f)** Ajuste aos dados da taxa de inflação mensal o método de Holt-Winters aditivo com $\alpha$=0.1, $\beta$=0.3 e $\gamma$=0.15 e com $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ óptimos. Comente as previsões obtidas.

**g)** Calcule as funções dos erros de previsão EQM, EAM e EPAM para as previsões passo a passo calculadas entre 2011m5 e 2012m4 com as duas especificações do método estudado na alínea anterior.

**h)** Estabeleça previsões da série de inflação mensal para o período de 2012m5 a 2014m4 com base no método de Holt-Winters aditivo (com pesquisa óptima de parâmetros).

# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

Um processo estocástico pode definir-se como uma sucessão (finita ou infinita) de variáveis aleatórias:

$$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots\} \text{ ou } \{Y_t, t = 1,2,\ldots,n,\ldots\}, \text{ em tempo discreto;}$$

ou

$$\{Y_t : t \in \tau\}, \tau = [0, \infty[\text{, em tempo contínuo.}$$

Uma série temporal pode entender-se como uma das infinitas realizações de um processo estacionário. Os processos estacionários baseiam-se no pressuposto de que o sistema se encontre num determinado estado de equilíbrio estatístico.

# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

Um processo $Y_t, t = 1,2,\ldots,n$ diz-se estacionário até à 2ª ordem (ou estacionário em covariância) se tem média constante,

$$\mu_t = E(Y_t) = \mu ,$$

variância constante,

$$\sigma_t^2 = Var(Y_t) = E(Y_t - \mu_t)^2 = \sigma^2 ,$$

a covariância entre $Y_{t_1}$ e $Y_{t_2}$,

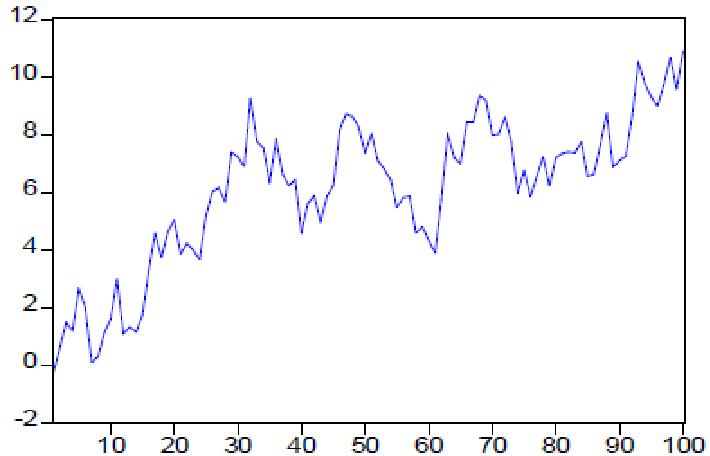
$$\gamma(t_1,t_2) = E(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2}) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k), \ \forall t_1, t_2, k$$

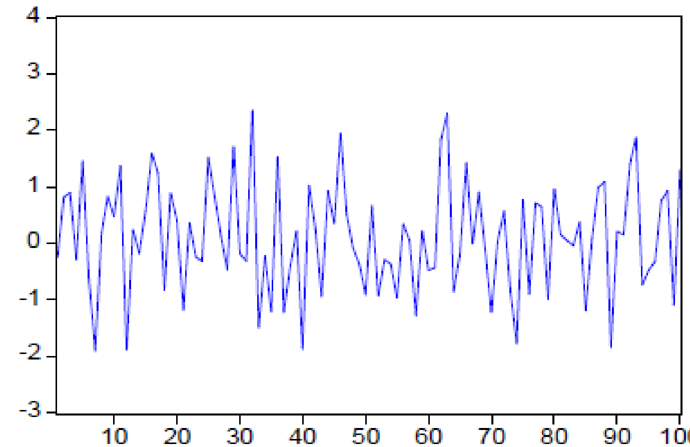
e a correlação entre $Y_{t_1}$ e $Y_{t_2}$,

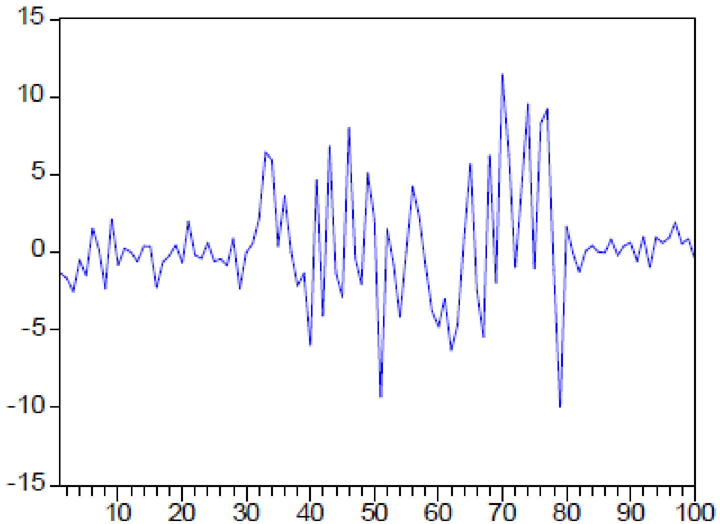
$$\rho(t_1,t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma_{t_1}^2}\sqrt{\sigma_{t_2}^2}} = \rho(t_1 + k, t_2 + k), \ \forall t_1, t_2, k ,$$

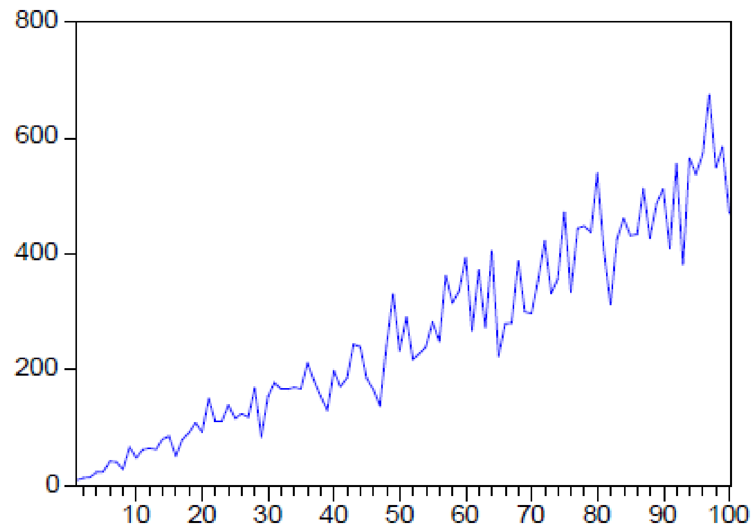
são independentes do tempo *t*, dependendo apenas da diferença de tempo *k* entre $Y_t$ e $Y_{t+k}$.

# **Modelos estocásticos de previsão**
## Estacionaridade, FAC e FACP



# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

**Função autocovariância**

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$$

**Função autocorrelação (FAC)**

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{[Var(Y_t)][Var(Y_{t+k})]}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

As principais propriedades das funções autocovariância e autocorrelação são as seguintes:

1) $\gamma_0 = Var(Y_t)$; $\rho_0 = 1$;

2) $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$;

3) $\gamma_k = \gamma_{-k}$; $\rho_k = \rho_{-k}$ ($\gamma_k$ e $\rho_k$ são simétricas em torno da origem, $k = 0$);

4) $\gamma_k$ e $\rho_k$ são semidefinidas positivas.

# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

**Função de autocorrelação parcial (FACP)**

Suponha-se um processo estacionário $Y_t$, com $E(Y_t) = 0$ e considere-se a regressão linear múltipla de $Y_{t+k}$ sobre as $k$ variáveis desfasadas $Y_{t+k-1}$, $Y_{t+k-2}$, ..., $Y_t$:

$$Y_{t+k} = \phi_{k1} Y_{t+k-1} + \phi_{k2} Y_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} Y_t + e_{t+k} ,$$

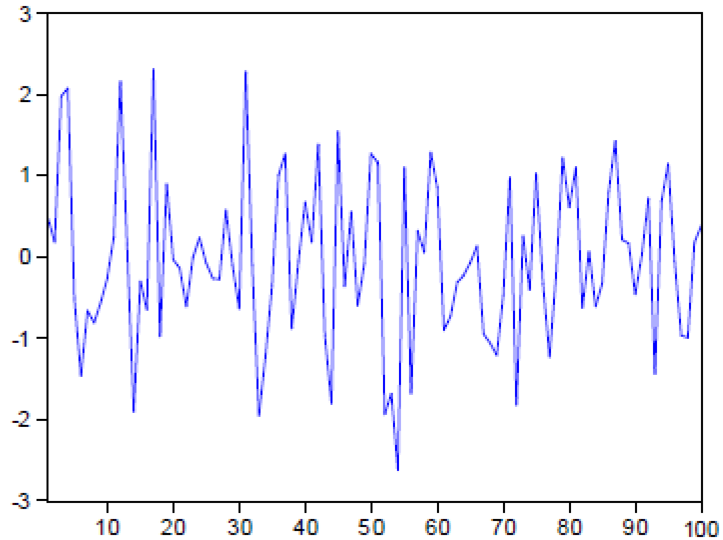
onde $\phi_{kj}$, $j = 1,2,\ldots,k$ são os coeficientes de regressão e $e_{t+k}$ o erro não correlacionado com $Y_{t+k-j}$ para $j \geq 1$. A FACP está relacionada com a FAC através do sistema de equações de Yule-Walker que se passa a descrever.

# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

Um processo ruído branco ("*white noise*") é constituído por uma sucessão de valores não correlacionados ao longo do tempo e expressa-se por:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

onde o termo aleatório $\varepsilon_t$ tem média constante, $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$, variância constante, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e covariância nula, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$, para todo o $k \neq 0$. As FAC e FACP de um ruído branco são igualmente nulas para todo o $k \neq 0$.



# Modelos estocásticos de previsão
## Estacionaridade, FAC e FACP

No caso da função de autocorrelação (FAC), esta pode ser estimada através da expressão:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t-k} - \overline{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(Y_t - \overline{Y}\right)^2}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

No caso da função de autocorrelação parcial (FACP), a estimação pode ser feita através de um método recursivo, através da expressão:

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_j},$$

com $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$ (inicialização) e $\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\hat{\phi}_{k-1,k-j}$, $j = 1,2,\ldots,k-1$.

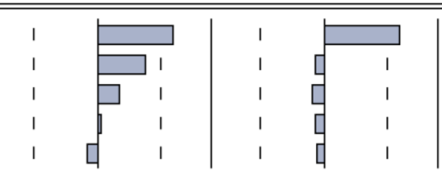
**Taxa de juro**

| *t* | *Xt* | *Xt*-1 | *Xt*-2 | *Xt*-3 | D | D1 | D2 | D3 | P1 | P2 | P3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,36 | | | | -0,65 | | | | | | |
| 2 | 2,58 | 2,36 | | | -0,43 | -0,65 | | | 0,28 | | |
| 3 | 2,68 | 2,58 | 2,36 | | -0,33 | -0,43 | -0,65 | | 0,15 | 0,22 | |
| 4 | 2,73 | 2,68 | 2,58 | 2,36 | -0,28 | -0,33 | -0,43 | -0,65 | 0,09 | 0,12 | 0,19 |
| 5 | 2,84 | 2,73 | 2,68 | 2,58 | -0,17 | -0,28 | -0,33 | -0,43 | 0,05 | 0,06 | 0,08 |
| 6 | 2,98 | 2,84 | 2,73 | 2,68 | -0,03 | -0,17 | -0,28 | -0,33 | 0,01 | 0,01 | 0,01 |
| 7 | 2,94 | 2,98 | 2,84 | 2,73 | -0,07 | -0,03 | -0,17 | -0,28 | 0,00 | 0,01 | 0,02 |
| 8 | 3,05 | 2,94 | 2,98 | 2,84 | 0,04 | -0,07 | -0,03 | -0,17 | 0,00 | 0,00 | -0,01 |
| 9 | 3,21 | 3,05 | 2,94 | 2,98 | 0,20 | 0,04 | -0,07 | -0,03 | 0,01 | -0,01 | -0,01 |
| 10 | 3,44 | 3,21 | 3,05 | 2,94 | 0,43 | 0,20 | 0,04 | -0,07 | 0,08 | 0,02 | -0,03 |
| 11 | 3,60 | 3,44 | 3,21 | 3,05 | 0,59 | 0,43 | 0,20 | 0,04 | 0,25 | 0,11 | 0,02 |
| 12 | 3,76 | 3,60 | 3,44 | 3,21 | 0,75 | 0,59 | 0,43 | 0,20 | 0,44 | 0,32 | 0,15 |
| **Méd** | 3,01 | | | | | | | | | | |

| | FAC | FACP |
|---|---|---|
| 1 | 0,690 | 0,690 |
| 2 | 0,435 | -0,078 |
| 3 | 0,212 | -0,110 |

Correlogram of TAXA

Date: 22/09/11 Time: 22:13
Sample: 2010M07 2011M06
Included observations: 12



| Autocorrelation | Partial Correlation | | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0.690 | 0.690 | 7.2654 | 0.007 |
| | | 2 | 0.435 | -0.078 | 10.439 | 0.005 |
| | | 3 | 0.212 | -0.110 | 11.277 | 0.010 |
| | | 4 | 0.040 | -0.081 | 11.310 | 0.023 |
| | | 5 | -0.083 | -0.067 | 11.474 | 0.043 |

**Processo médias móveis infinito**

O processo médias móveis infinito, ou processo MA($\infty$), descreve o processo $Y_t$ como combinação linear de uma série de variáveis aleatórias não correlacionadas:

$$Y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

onde $\psi_0 = 1$, $\varepsilon_t$ é um processo ruído branco com média zero, $E(\varepsilon_t) = 0$, e variância constante, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, e $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Se definirmos o operador atraso pela relação, $B^j Y_t = Y_{t-j}$, podemos escrever o processo MA($\infty$) na seguinte forma compactada:

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots)\varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

onde $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ .

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

Pode facilmente mostrar-se que:

$$E(Y_t) = 0\ ,$$

$$Var(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2\ ,$$

e

$$E(\varepsilon_t Y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ 0, & k > 0, \end{cases}$$

o que permite obter a FAC do processo:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{E(Y_t Y_{t+k})}{Var(Y_t)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}\ .$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

**Processo autoregressivo infinito**

Outra forma de escrever o processo $Y_t$ é na representação autoregressiva infinita, ou AR($\infty$), que consiste na regressão de $Y_t$ sobre os seus valores passados mais um choque aleatório:

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} + \varepsilon_t,$$

ou,

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots) Y_t = \varepsilon_t,$$

ou ainda,

$$\pi(B) Y_t = \varepsilon_t,$$

onde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$ e $1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

Box e Jenkins (1970, 1976) introduziram os modelos lineares de séries estacionárias não sazonais, designados por modelos ARMA($p$,$q$), através da representação genérica:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}\,,\ \phi_p \neq 0 \text{ e } \theta_q \neq 0\,,$$

onde a série $Y_t$ é função dos seus valores passados e da combinação linear de uma sucessão de choques aleatórios; $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ são os parâmetros autoregressivos e $p$ a ordem da componente autoregressiva; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ são os parâmetros de médias móveis e $q$ a ordem da componente de médias móveis. Na modelação empírica de séries estacionárias, são frequentemente utilizados modelos parcimoniosos do tipo ARMA($p$,$q$), $p, q = 0{,}1{,}2$. Em seguida, descreve-se a sua estrutua e as suas principais propriedades estatísticas.

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

**Modelo AR(1)**

O modelo autoregressivo de 1ª ordem ou AR(1) tem a representação,

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \, ,$$

onde $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. Para que o processo seja estacionário deve satisfazer a condição $|\phi| < 1$. Para melhor ilustrar esta condição de estacionaridade, escreva-se o processo na forma compactada (usando o já conhecido operador atraso $B$):

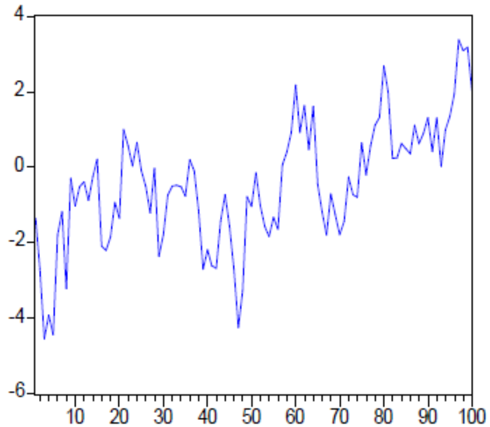
$$(1 - \phi B) Y_{t-1} = \varepsilon_t \, ,$$

onde $\phi(B) = (1 - \phi B)$ é uma função polinomial de $Y_t$. A estacionaridade do processo AR(1) exige que a raiz da equação polinomial $\phi(B) = 0$, dada por $B = \phi^{-1}$, tenha módulo superior a um, o que equivale a pedir que:

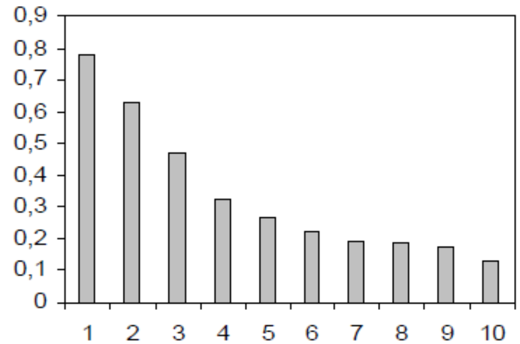
$$|B| = \left| \frac{1}{\phi} \right| > 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1 \, .$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

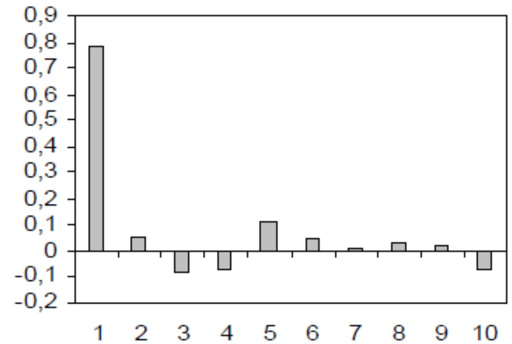
(a) $Y_t = 0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$



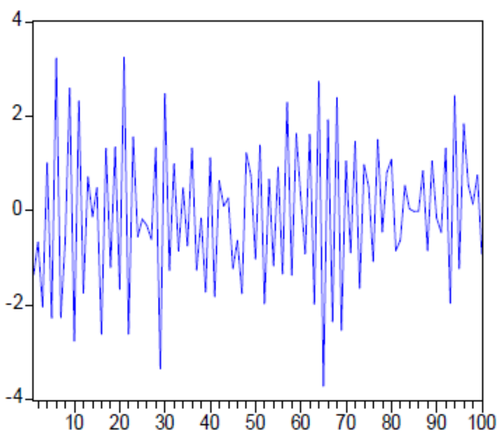

FAC do AR(1): $Y_t = 0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$



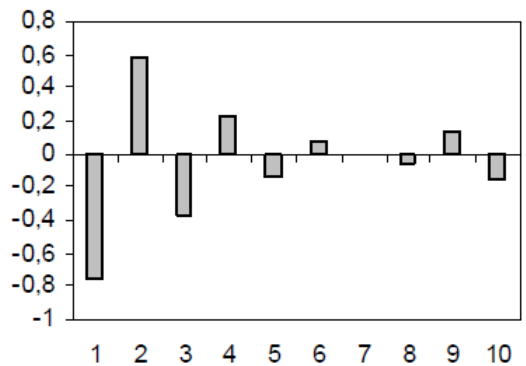

FACP do AR(1): $Y_t = 0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$



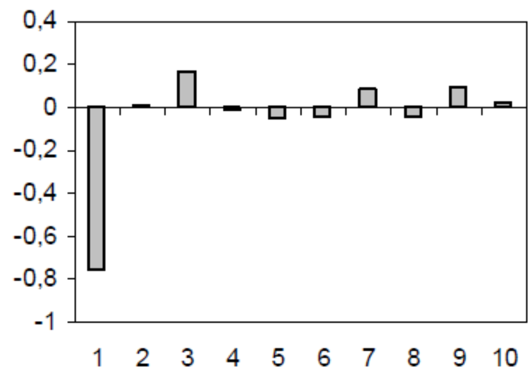

(b) $Y_t = -0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$




FAC do AR(1): $Y_t = -0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$




FACP do AR(1): $Y_t = -0{,}7Y_{t-1} + \varepsilon_t$



**Modelo AR(2)**

O modelo autoregressivo de 2ª ordem ou AR(2) tem a forma,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t ,$$

ou, utilizando o operador atraso,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Y_t = \varepsilon_t ,$$

ou,

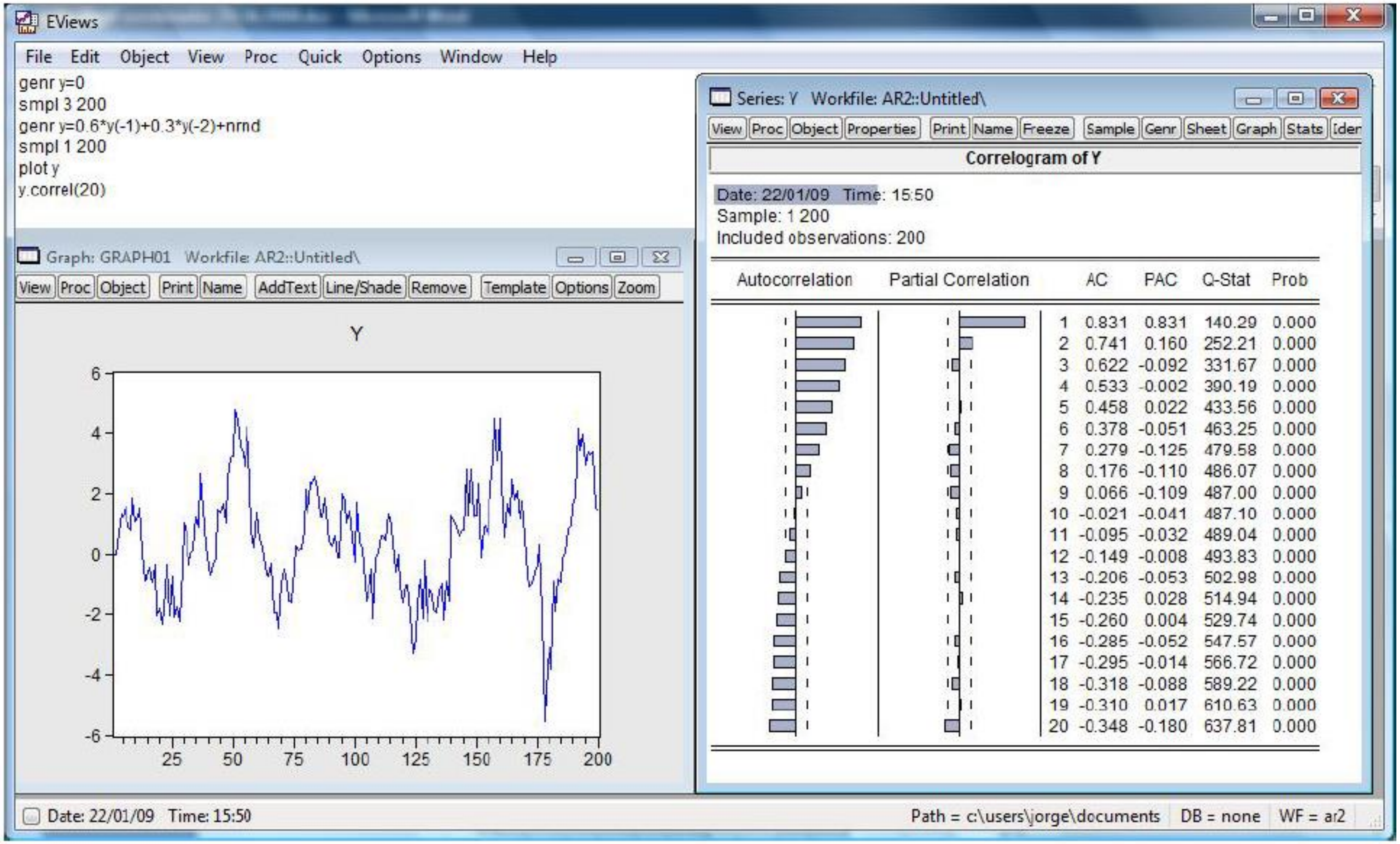
$$\phi_2(B) Y_t = \varepsilon_t ,$$

onde $\phi_2(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ é um polinómio autoregressivo de 2ª ordem e $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. Para ser estacionário, é necessário que as raízes de $\phi_2(B) = 0$ tenham módulo superior a um.

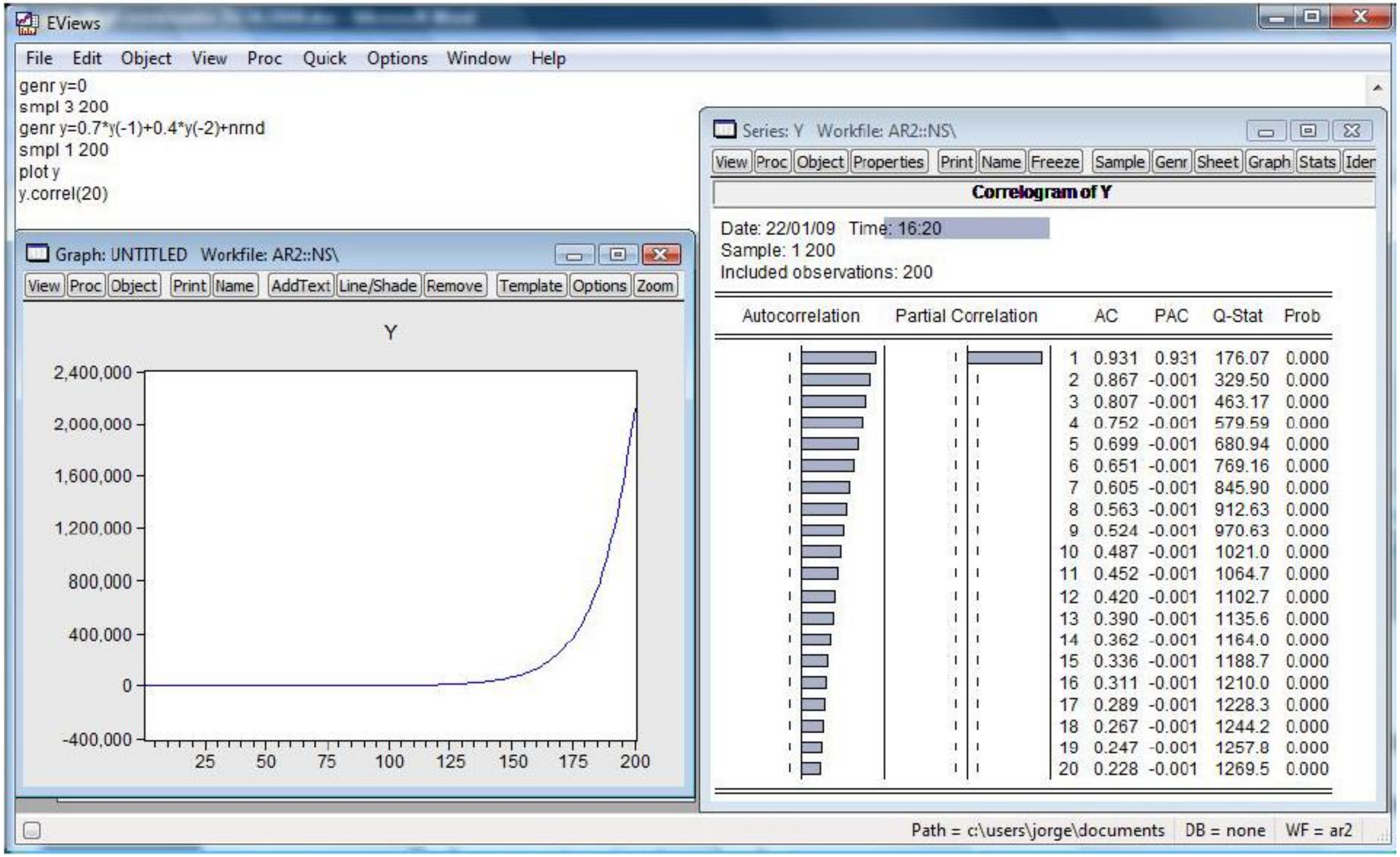
Deste modo, as condições necessárias e suficientes de estacionaridade do processo AR(2) são:

$$\phi_2 + \phi_1 < 1 \wedge \phi_2 - \phi_1 < 1 \wedge -1 < \phi_2 < 1 .$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários




| Autocorrelation | Partial Correlation | | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0.931 | 0.931 | 176.07 | 0.000 |
| | | 2 | 0.867 | -0.001 | 329.50 | 0.000 |
| | | 3 | 0.807 | -0.001 | 463.17 | 0.000 |
| | | 4 | 0.752 | -0.001 | 579.59 | 0.000 |
| | | 5 | 0.699 | -0.001 | 680.94 | 0.000 |
| | | 6 | 0.651 | -0.001 | 769.16 | 0.000 |
| | | 7 | 0.605 | -0.001 | 845.90 | 0.000 |
| | | 8 | 0.563 | -0.001 | 912.63 | 0.000 |
| | | 9 | 0.524 | -0.001 | 970.63 | 0.000 |
| | | 10 | 0.487 | -0.001 | 1021.0 | 0.000 |
| | | 11 | 0.452 | -0.001 | 1064.7 | 0.000 |
| | | 12 | 0.420 | -0.001 | 1102.7 | 0.000 |
| | | 13 | 0.390 | -0.001 | 1135.6 | 0.000 |
| | | 14 | 0.362 | -0.001 | 1164.0 | 0.000 |
| | | 15 | 0.336 | -0.001 | 1188.7 | 0.000 |
| | | 16 | 0.311 | -0.001 | 1210.0 | 0.000 |
| | | 17 | 0.289 | -0.001 | 1228.3 | 0.000 |
| | | 18 | 0.267 | -0.001 | 1244.2 | 0.000 |
| | | 19 | 0.247 | -0.001 | 1257.8 | 0.000 |
| | | 20 | 0.228 | -0.001 | 1269.5 | 0.000 |

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

**Modelo AR(*p*)**

O modelo autoregressivo de ordem *p* ou AR(*p*) tem a forma,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \text{ , com } \phi_p \neq 0 \text{ ,}$$

ou, utilizando o operador atraso,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = \varepsilon_t \text{ ,}$$

ou ainda,

$$\phi_p(B) Y_t = \varepsilon_t \text{ ,}$$

onde $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ é um polinómio autoregressivo de ordem *p* e $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. A estacionaridade do processo exige que as *p* raízes de $\phi_p(B) = 0$ tenham módulo superior a um.

**Modelo MA(1)**

O modelo médias móveis de 1ª ordem ou MA(1) descreve a série $Y_t$ através de um choque aleatório, $\varepsilon_t$, e também do seu valor desfasado um período, $\varepsilon_{t-1}$. Define-se através da relação,

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},$$

ou,

$$Y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t,$$

ou ainda,

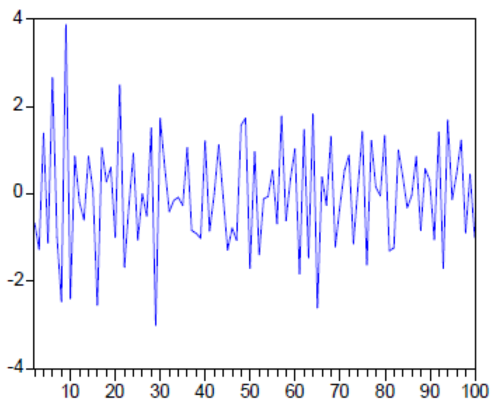
$$Y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

onde $\theta(B) = 1-\theta B$ é um polinómio médias móveis de 1ª ordem e $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. O processo MA(1) é sempre estacionário, porquanto $1+\theta^2 < \infty$ (veja-se Wei, 2007). Para ser invertível, a raiz de $\theta(B)=0$ deve ter módulo superior a um:

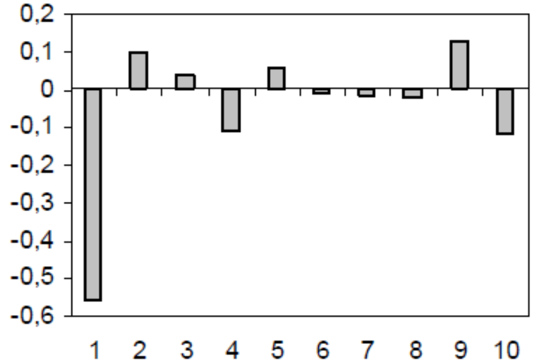
$$|B| = \left|\frac{1}{\theta}\right| > 1 \Leftrightarrow |\theta| < 1.$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

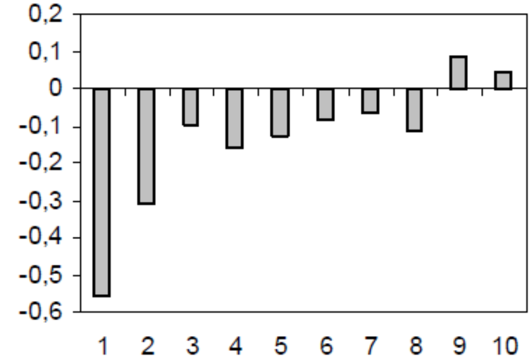
(a) $Y_t = \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1}$



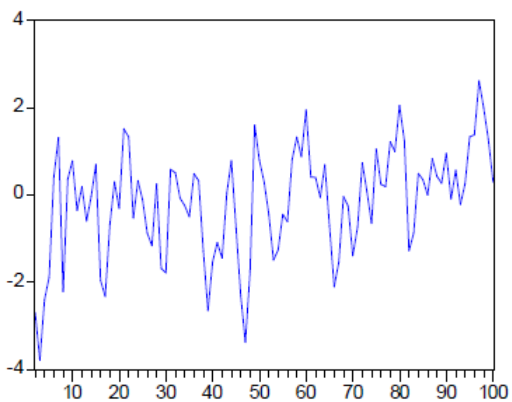

FAC do MA(1): $Y_t = \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1}$



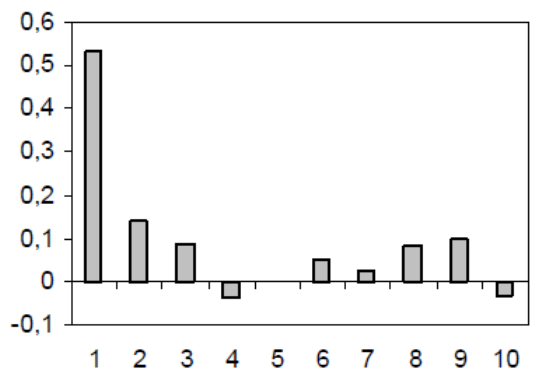

FACP do MA(1): $Y_t = \varepsilon_t - 0.75\varepsilon_{t-1}$



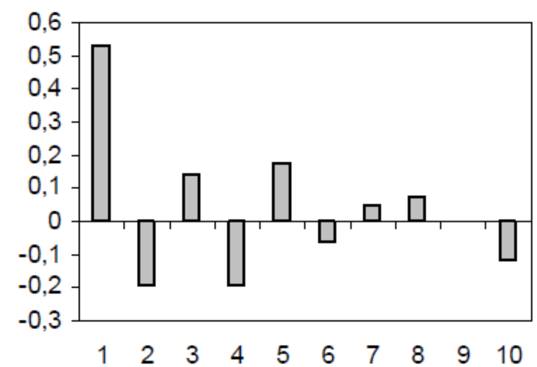

(b) $Y_t = \varepsilon_t + 0.75\varepsilon_{t-1}$




FAC do MA(1): $Y_t = \varepsilon_t + 0.75\varepsilon_{t-1}$




FACP do MA(1): $Y_t = \varepsilon_t + 0.75\varepsilon_{t-1}$



**Modelo MA(2)**

O modelo médias móveis de 2ª ordem ou MA(2) assume a expressão,

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2},$$

ou,

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t,$$

ou ainda,

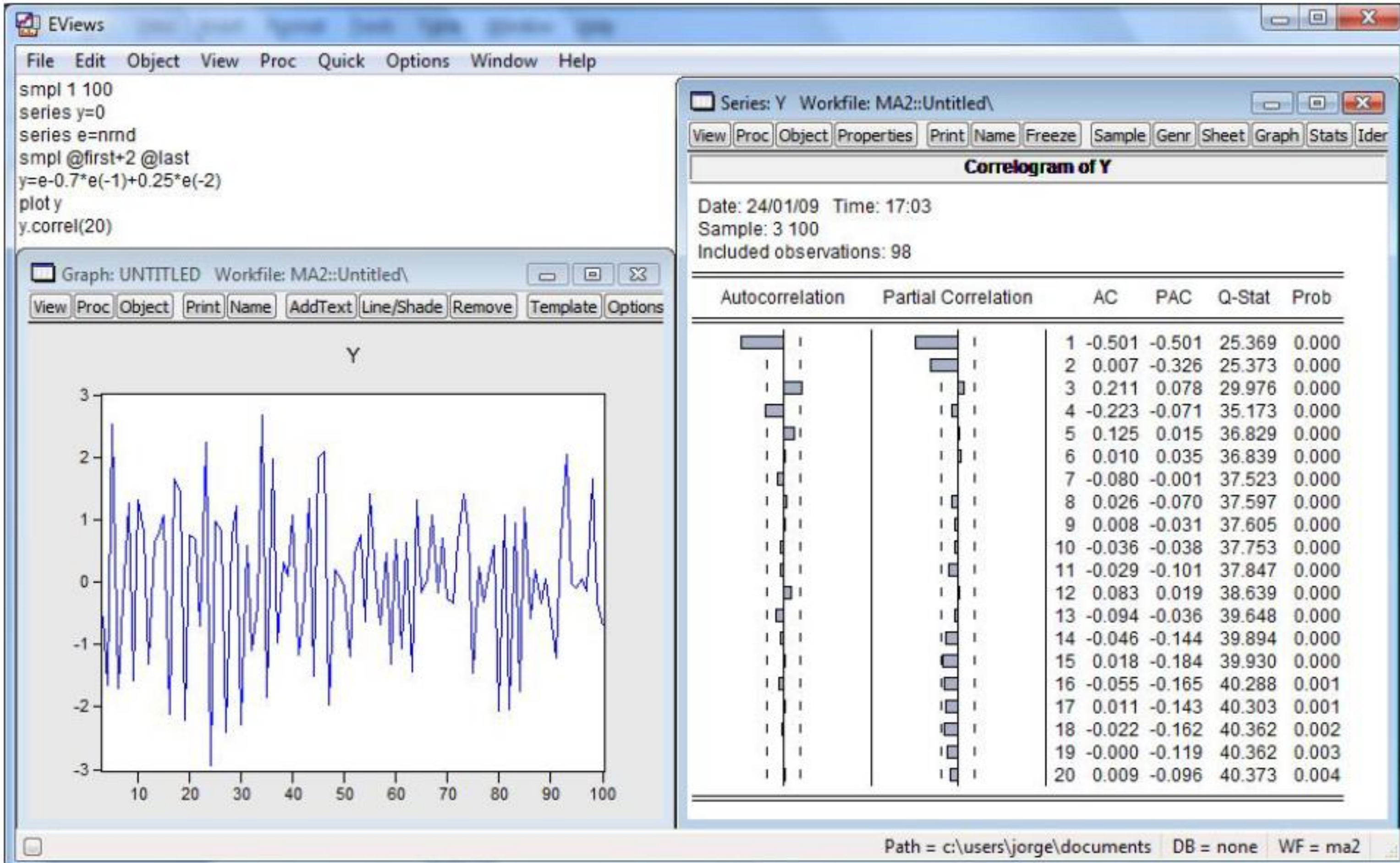
$$Y_t = \theta_2(B)\varepsilon_t,$$

onde $\theta_2(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ é um polinómio médias móveis de 2ª ordem e $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. Para ser invertível, as raízes de $\theta_2(B) = 0$ devem ter módulo superior a um, o que equivale a pedir que os coeficientes de médias móveis $\theta_1$ e $\theta_2$ têm que satisfazer as condições:

$$\theta_2 + \theta_1 < 1 \wedge \theta_2 - \theta_1 < 1 \wedge -1 < \theta_2 < 1.$$

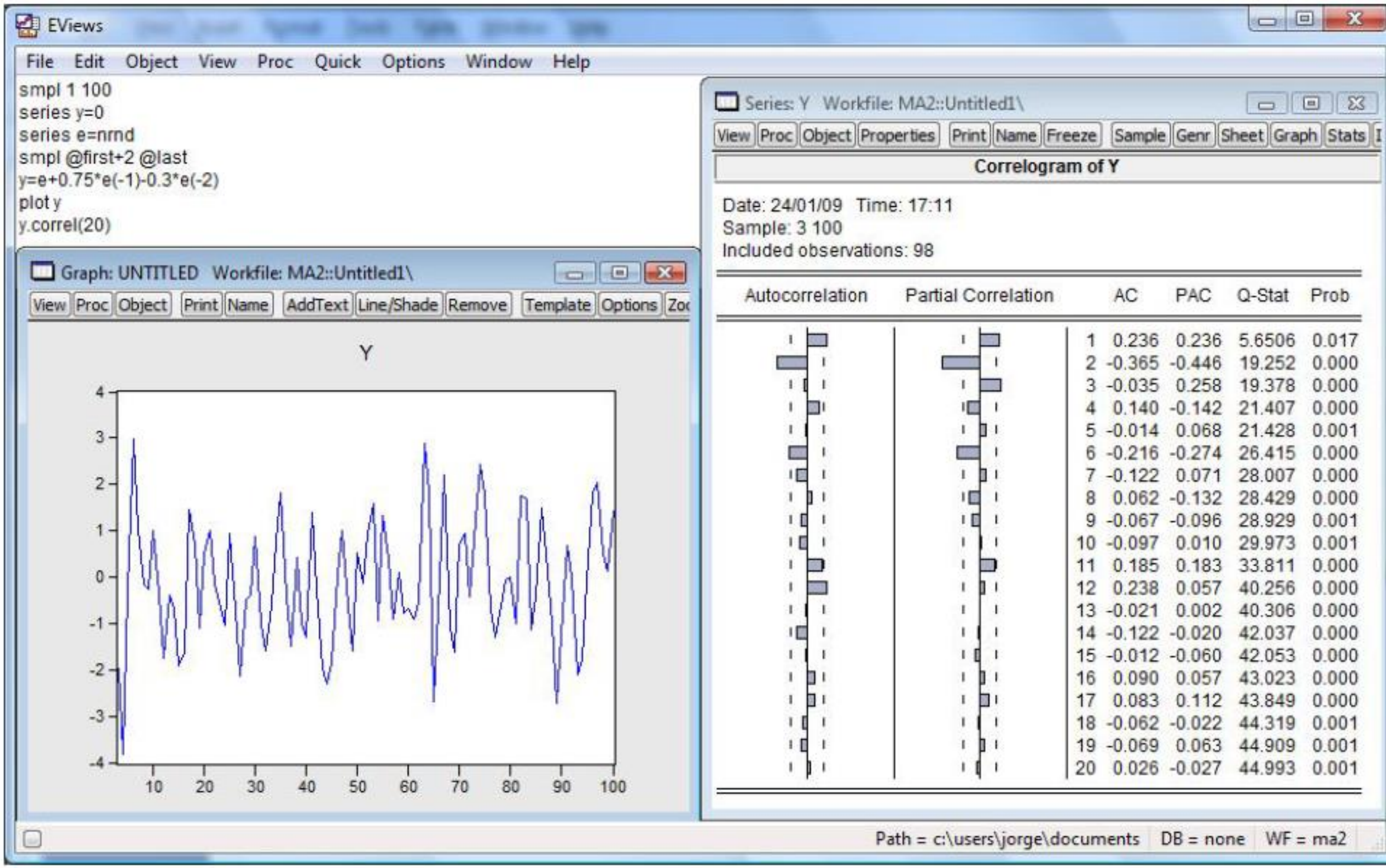
# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

$$Y_t = \varepsilon_t - 0{,}7\varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2}$$



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

$$Y_t = \varepsilon_t + 0{,}75\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2}$$




| | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.236 | 0.236 | 5.6506 | 0.017 |
| 2 | -0.365 | -0.446 | 19.252 | 0.000 |
| 3 | -0.035 | 0.258 | 19.378 | 0.000 |
| 4 | 0.140 | -0.142 | 21.407 | 0.000 |
| 5 | -0.014 | 0.068 | 21.428 | 0.001 |
| 6 | -0.216 | -0.274 | 26.415 | 0.000 |
| 7 | -0.122 | 0.071 | 28.007 | 0.000 |
| 8 | 0.062 | -0.132 | 28.429 | 0.000 |
| 9 | -0.067 | -0.096 | 28.929 | 0.001 |
| 10 | -0.097 | 0.010 | 29.973 | 0.001 |
| 11 | 0.185 | 0.183 | 33.811 | 0.000 |
| 12 | 0.238 | 0.057 | 40.256 | 0.000 |
| 13 | -0.021 | 0.002 | 40.306 | 0.000 |
| 14 | -0.122 | -0.020 | 42.037 | 0.000 |
| 15 | -0.012 | -0.060 | 42.053 | 0.000 |
| 16 | 0.090 | 0.057 | 43.023 | 0.000 |
| 17 | 0.083 | 0.112 | 43.849 | 0.000 |
| 18 | -0.062 | -0.022 | 44.319 | 0.001 |
| 19 | -0.069 | 0.063 | 44.909 | 0.001 |
| 20 | 0.026 | -0.027 | 44.993 | 0.001 |

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

**Modelo MA($q$)**

O modelo médias móveis de ordem $q$ ou MA($q$) assume a expressão:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}\,,\ \text{com}\ \theta_q \neq 0\,,$$

ou,

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)\varepsilon_t\,,$$

ou ainda,

$$Y_t = \theta_q(B)\varepsilon_t\,,$$

onde $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ é um polinómio de médias móveis de ordem $q$ e $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero e variância constante. Para ser invertível, as raízes de $\theta_q(B) = 0$ devem ter módulo superior a um.

**Modelo ARMA(1,1)**

O modelo ARMA(1,1) inclui um factor autoregressivo de 1ª ordem e um factor de médias móveis de 1ª ordem e tem a representação,

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \text{ com } \phi \neq \theta ,$$

ou,

$$(1-\phi B)Y_t = (1-\theta B)\varepsilon_t ,$$

ou ainda,

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t ,$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi B$ é um polinómio autoregressivo de 1ª ordem, $\theta(B) = 1 - \theta B$ é um polinómio médias móveis de 1ª ordem, e $\varepsilon_t$ é um ruído branco. Para ser estacionário, a raiz de $\phi(B) = 0$ deve ter módulo superior a um, o que acontece para $-1 < \phi < 1$. Para ser invertível, a raiz de $\theta(B) = 0$ deve ter módulo superior a um, o que equivale a pedir que $-1 < \theta < 1$.

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

O modelo ARMA(1,1) pode igualmente representar-se em termos de um processo de médias móveis infinito:

$$Y_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

com

$$\psi(B) = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = \frac{1 - \theta B}{1 - \phi B}.$$

Daqui resulta que:

$$(1 - \phi B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1 - \theta B.$$

Recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados (Wei, 2007), sai que:

$$\psi_j = \phi^{j-1}(\phi - \theta), j \geq 1.$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

O modelo ARMA(1,1) pode igualmente escrever-se em termos de uma representação autoregressiva:

$$\pi(B)Y_t = \varepsilon_t,$$

com

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots = \frac{1-\phi B}{1-\theta B}.$$

Daqui resulta que:

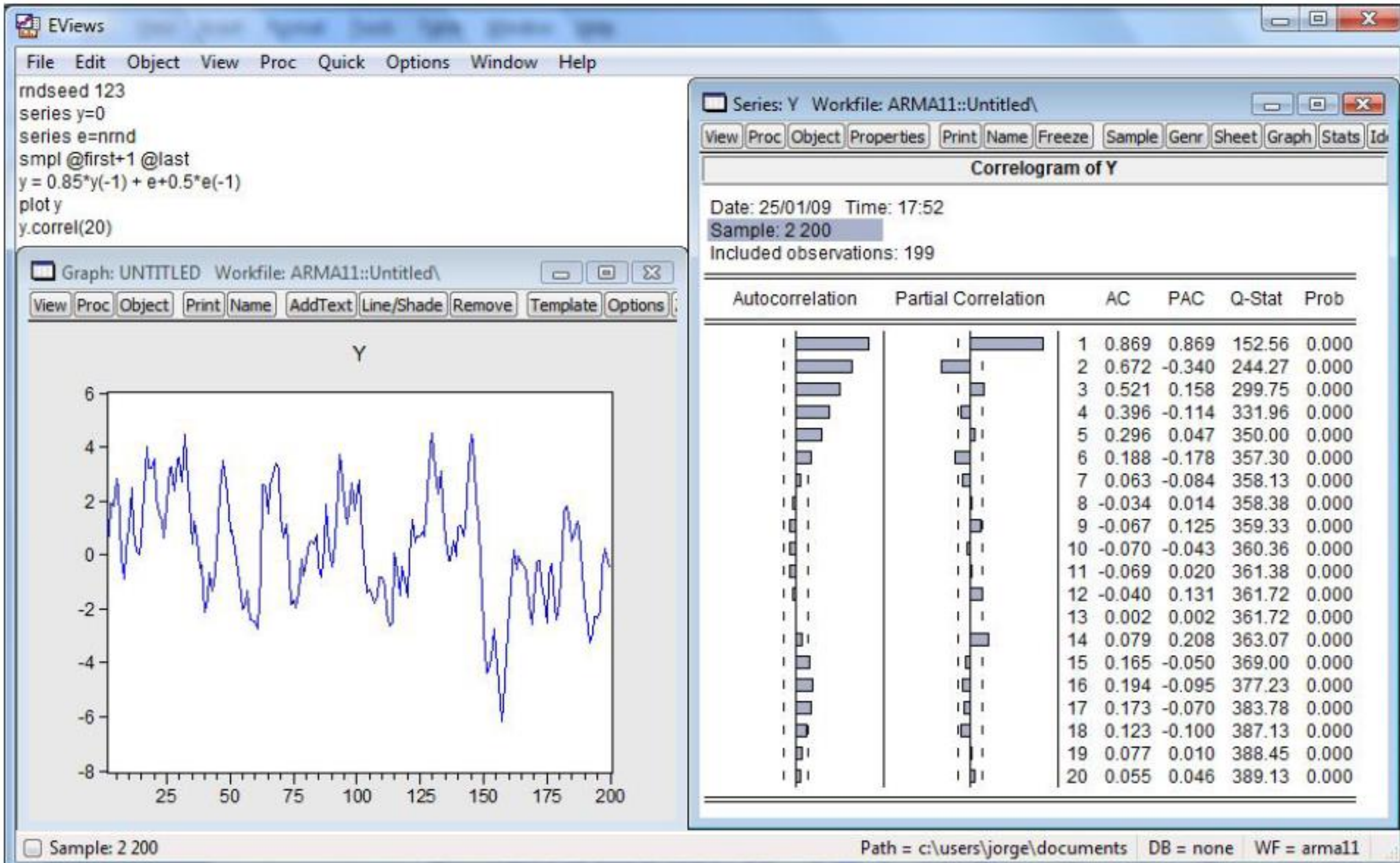
$$(1-\theta B)(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots) = 1 - \phi B,$$

o que equivale a:

$$\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta), j \geq 1.$$

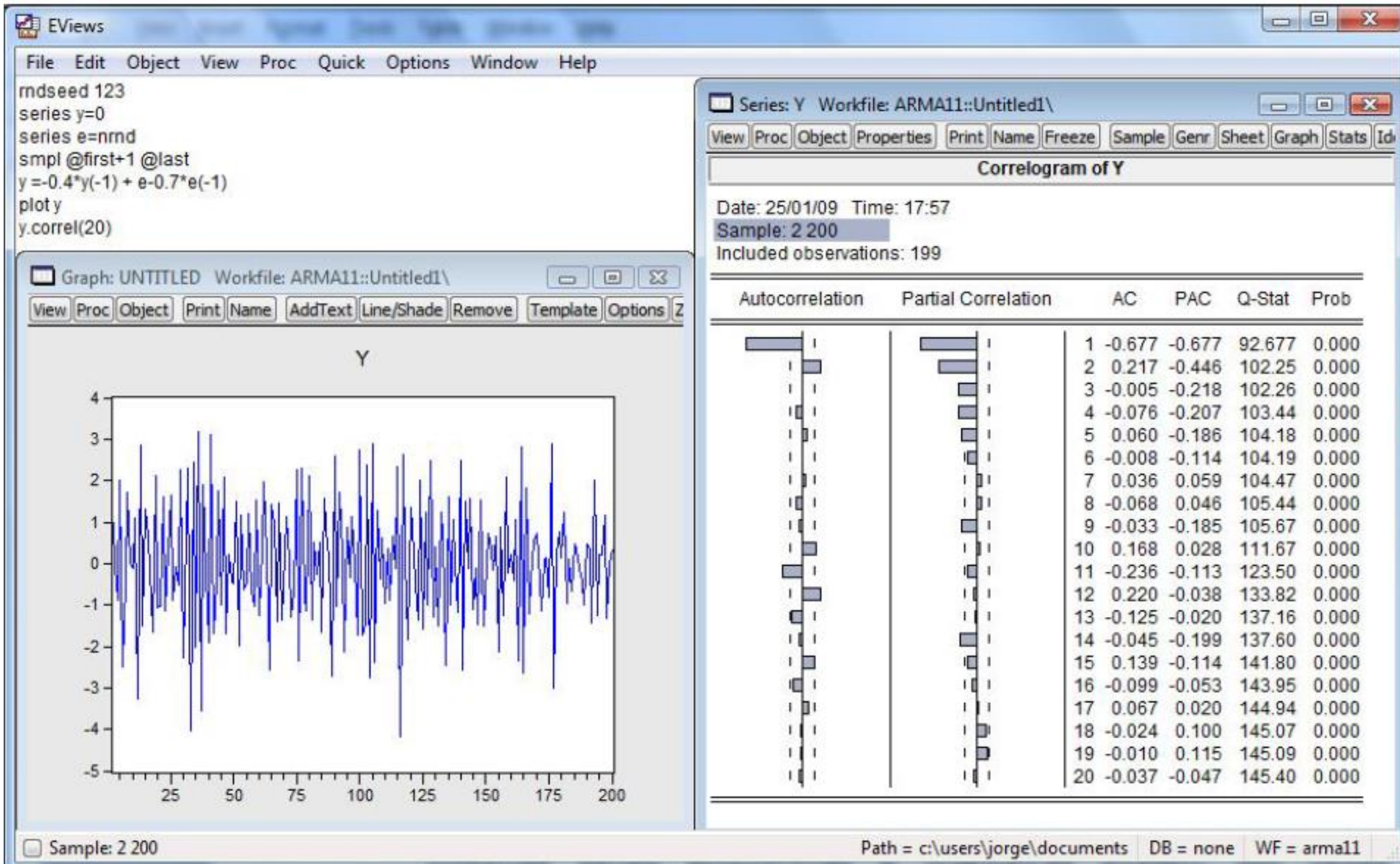
# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

$$Y_t = 0{,}85Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$$



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

$$Y_t = -0{,}4Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}7\varepsilon_{t-1}$$



### Modelo ARMA(p,q)

O modelo misto autoregressivo e médias móveis ARMA($p$,$q$) tem a representação,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

ou, usando o operador atraso,

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) \varepsilon_t,$$

ou ainda,

$$\phi_p(B) Y_t = \theta_q(B) \varepsilon_t,$$

onde $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ é um polinómio autoregressivo de ordem $p$ e $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$ é um polinómio médias móveis de ordem $q$, e $\varepsilon_t$ é um ruído branco. A estacionaridade do processo exige que as raízes de $\phi_p(B) = 0$ tenham módulo superior a um e a invertibilidade do processo requer que as raízes de $\theta_q(B) = 0$ tenham módulo superior a um.

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

O modelo misto autoregressivo e de médias móveis estritamente sazonal de ordens $P$ e $Q$, ou simplesmente modelo SARMA$(P,Q)_s$ tem a forma,

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \cdots + \Phi_P Y_{t-Ps} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} - \cdots - \Theta_Q \varepsilon_{t-Qs}, \text{ com } \Phi_P \neq 0 \text{ e } \Theta_Q \neq 0,$$

ou

$$(1 - \Phi_1 B^s - \cdots - \Phi_P B^{Ps}) Y_t = (1 - \Theta_1 B^s - \cdots - \Theta_Q B^{Qs}) \varepsilon_t,$$

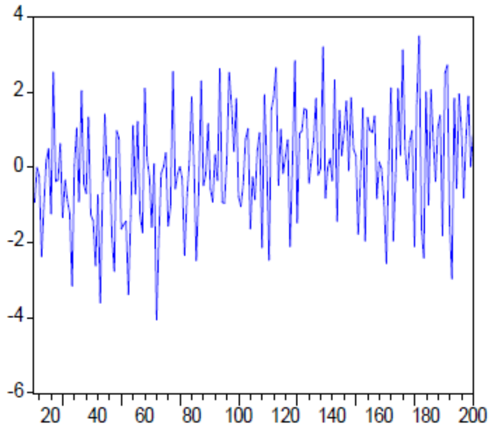
ou ainda,

$$\Phi_P(B^s) Y_t = \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t,$$

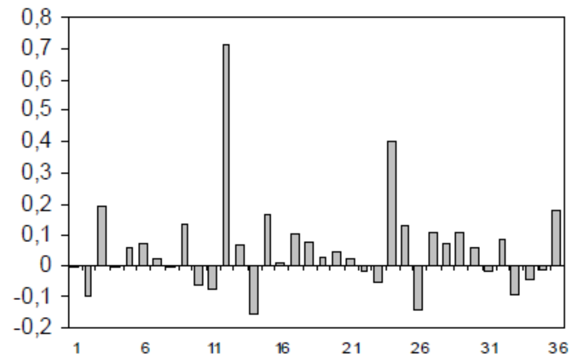
onde $\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \cdots - \Phi_P B^{Ps}$ é um polinómio autoregressivo estritamente sazonal em $B^s$ de grau $P$, $\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \cdots - \Theta_Q B^{Qs}$ é um polinómio médias móveis estritamente sazonal em $B^s$ de grau $Q$, e $\varepsilon_t$ é um ruído branco de média zero. Para que o processo seja estacionário e invertível, as raízes de $\Phi_P(B^s) = 0$ e $\Theta_Q(B^s) = 0$ devem ter módulo superior a um, respectivamente.

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

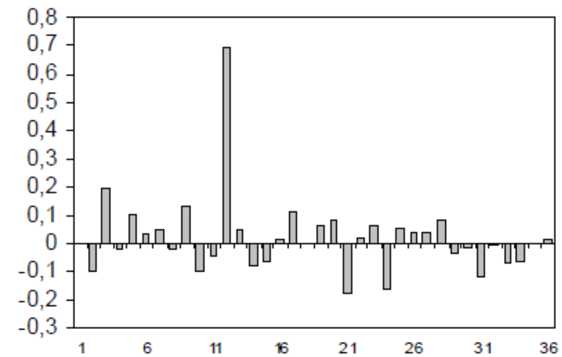
(i) $(1-0.65B^{12})Y_t = (1+0.25B^{12})\varepsilon_t$



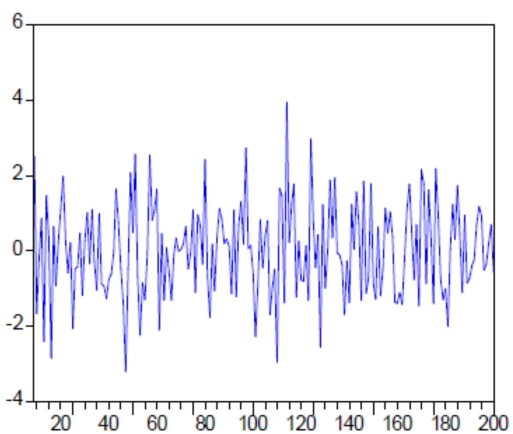

FAC do SARMA$(1,1)_{12}$



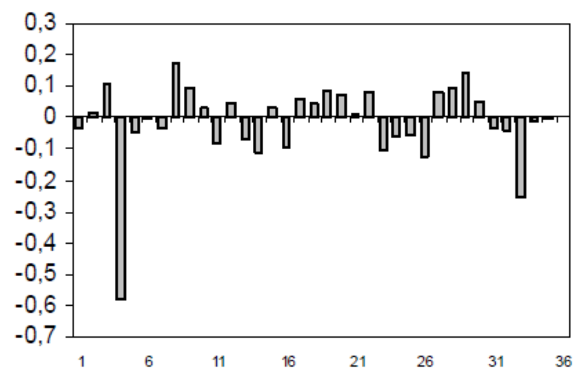

FACP do SARMA$(1,1)_{12}$



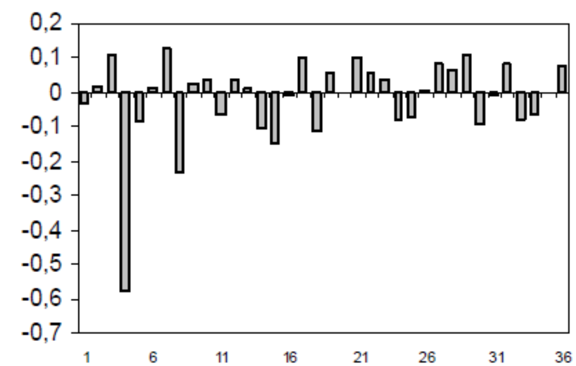

(ii) $(1-0.3B^4)Y_t = (1-0.4B^4+0.15B^8)\varepsilon_t$




FAC do SARMA$(1,2)_4$




FACP do SARMA$(1,2)_4$



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

A combinação do modelo ARMA($p$,$q$) e SARMA($P$,$Q$)$_s$ permite obter o modelo multiplicativo, com componente sazonal e não sazonal, SARMA($p$,$q$)($P$,$Q$)$_s$, através da expressão,

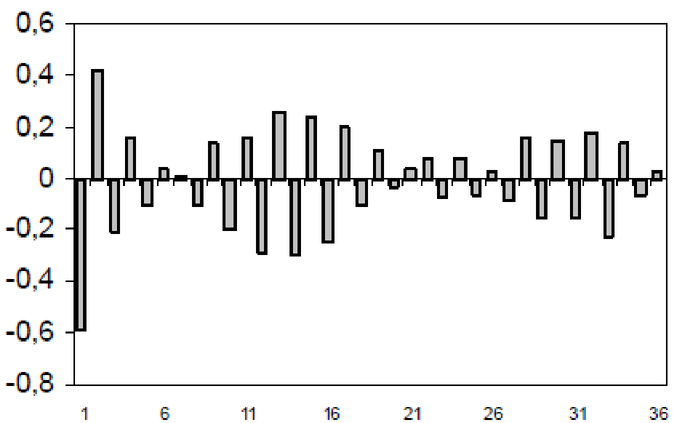
$$(1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p)(1-\Phi_1 B^s-\cdots-\Phi_P B^{Ps})Y_t=(1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q)(1-\Theta_1 B^s-\cdots-\Theta_Q B^{Qs})\varepsilon_t\,,$$

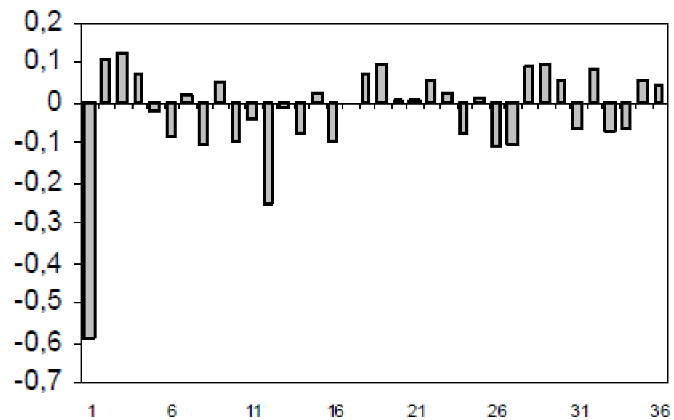
ou,

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)Y_t=\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\varepsilon_t\,.$$

FAC FACP

SARMA(1,0)(1,0)$_{12}$: $(1-0.7B)(1+0.25B^{12})Y_t=\varepsilon_t$

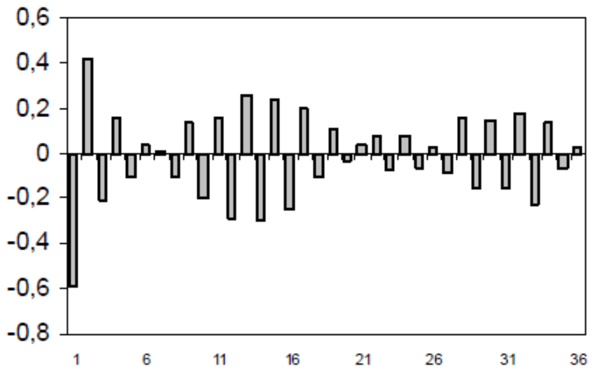


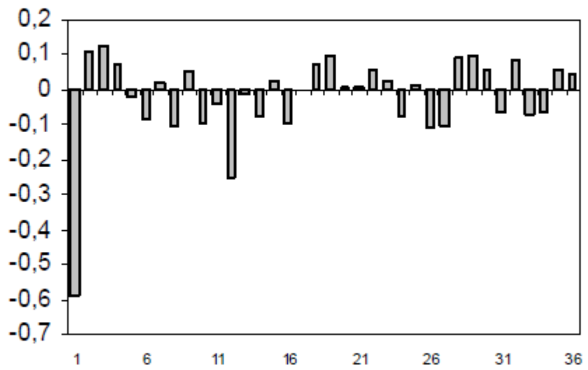
# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

FAC e FACP do modelo SARMA(1,0)(1,0)$_{12}$: $(1-0.7B)(1+0.25B^{12})Y_t=\varepsilon_t$

FAC




FACP



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos estacionários

| Modelo | FAC | FACP |
|---|---|---|
| AR($p$) | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero | Queda brusca para zero a partir do *lag* $p$+1 |
| MA($q$) | Queda brusca para zero a partir do *lag* $q$+1 | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero |
| ARMA($p$,$q$) | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero |
| SAR($P$) | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero sobre os *lags* $s$, 2$s$, ... | Queda brusca para zero a partir do *lag* ($P$+1)$s$ |
| SMA($Q$) | Queda brusca para zero a partir do *lag* ($Q$+1)$s$ | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero sobre os *lags* $s$, 2$s$, ... |
| SARMA($P$,$Q$) | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero sobre os *lags* $s$, 2$s$, ... | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero sobre os *lags* $s$, 2$s$, ... |
| SARMA($p$,$q$)($P$,$Q$)$_s$ | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero | Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero |

## **Modelos estocásticos de previsão**
## Processos estacionários – Exercício de aplicação

Com o auxílio do software Eviews, construa séries simuladas e estime as FAC e FACP dos seguintes processos:

a) ARMA(1,2) com $\phi 1=0.4$, $\theta 1=-0.6$ e $\theta 2=-0.2$.
b) SAR(3)4 com $\Phi 1=0.55$ e $\Phi 3=-0.25$
c) SARIMA(1,1)(0,1)12 com $\phi 1=-0.45$, $\theta 1=0.2$ e $\Theta 1=0.35$

# **Modelos estocásticos de previsão**
## Processos não estacionários

Algumas séries apresentam movimentos de tendência determinística que se manifestam consistentemente durante um período longo de tempo. Por exemplo, se a média do processo é uma função de tendência linear do tipo $\mu_t = a + bt$ (onde *a* e *b* são parâmetros e *t* a variável de tendência), poderá utilizar-se o seguinte modelo de tendência linear determinística,

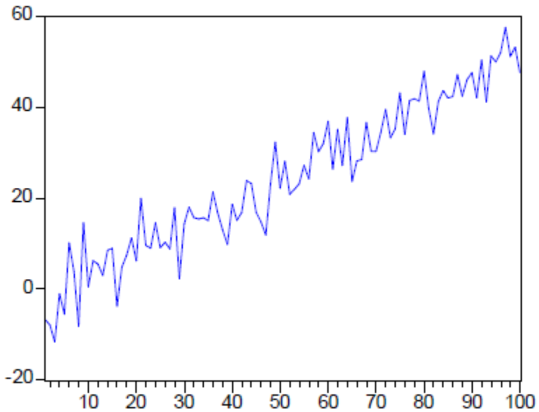
$$Y_t = a + bt + \varepsilon_t$$

onde $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero. Suponhamos agora que a média do processo tem tendência quadrática determinística do tipo $\mu_t = a + bt + ct^2$, o que nos leva a propor o seguinte modelo de tendência quadrática,

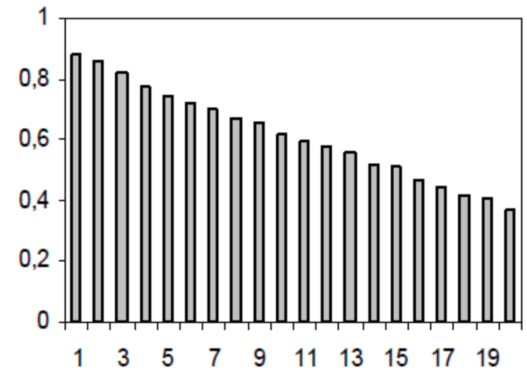
$$Y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t .$$

# **Modelos estocásticos de previsão**
## Processos não estacionários

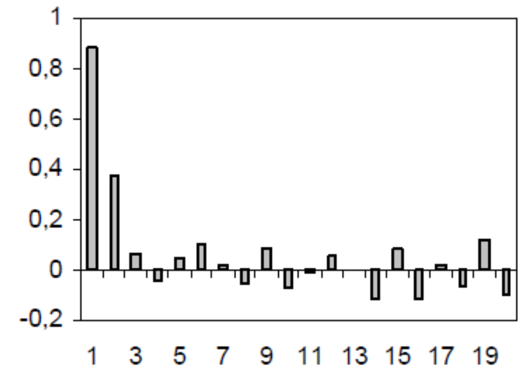
Modelo de tendência linear



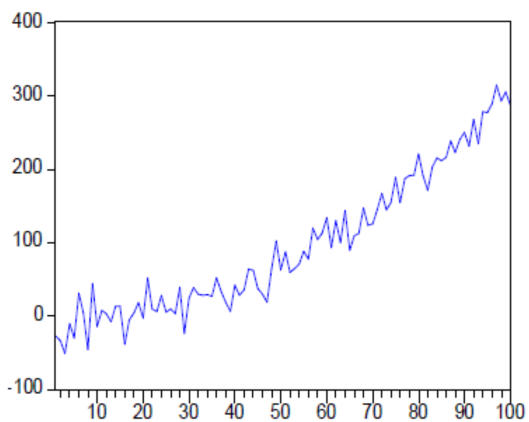

FAC do modelo de tendência linear



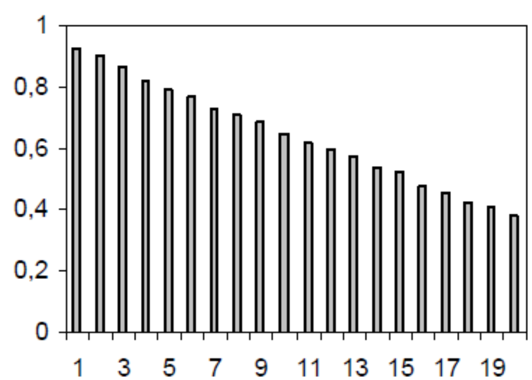

FACP do modelo de tendência linear



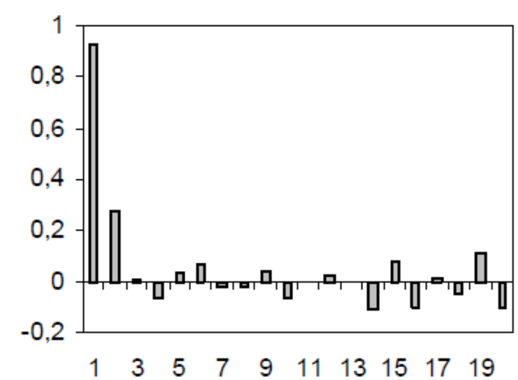

Modelo de tendência quadrática




FAC do modelo de tendência quadrática




FACP do modelo de tendência quadrática



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos não estacionários

A diferenciação simples de uma série temporal consiste em obter a diferença entre as observações da série nos momentos $t$ e $t-1$, isto é:

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

ou, utilizando o já conhecido operador atraso ($BY_t = Y_{t-1}$),

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t .$$

O operador de diferenciação de ordem $d$, para qualquer inteiro $d \geq 1$, consiste em diferenciar a série $d$ vezes e define-se por:

$$\nabla^d Y_t = (1-B)^d Y_t .$$

Por exemplo, as diferenças de 2ª ordem de uma série $Y_t$ correspondem às diferenças das primeiras diferenças, como se mostra de seguida:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Y_t &= (1-B)^2 Y_t \\ &= (1-2B+B^2)Y_t \\ &= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \\ &= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}). \end{aligned}$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos não estacionários

Quando uma série apresenta um comportamento periódico repetitivo, pode-se aplicar uma transformação de diferenciação sazonal, definida por:

$$\nabla_s Y_t = Y_t - Y_{t-s} = (1 - B^s)Y_t \,.$$

Por exemplo, uma diferenciação sazonal seguida de uma diferenciação simples não sazonal pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla_s Y_t) &= (1 - B)(1 - B^s)Y_t \\ &= (1 - B - B^s + B^{s+1})Y_t \\ &= Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-s} + Y_{t-s-1}.\end{aligned}$$

Por último, o operador de diferenciação sazonal de ordem $D$, para qualquer inteiro $D \geq 1$, consiste em diferenciar sazonalmente a série $D$ vezes e define-se por:

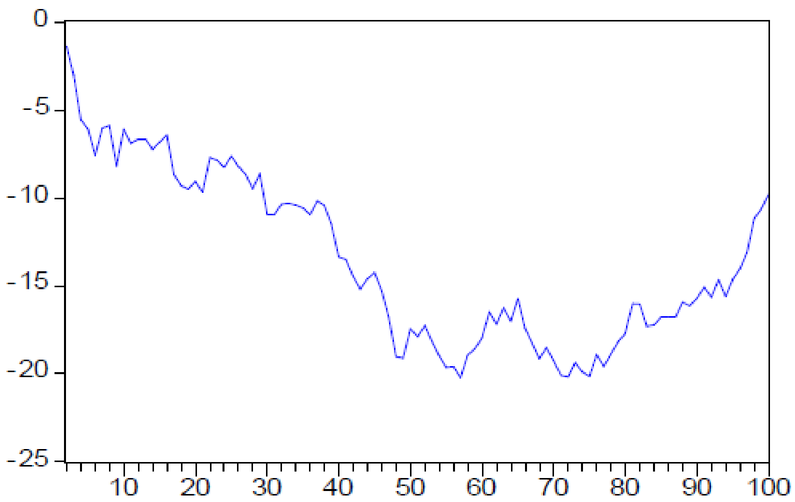
$$\nabla_s^D Y_t = (1 - B^s)^D Y_t \,.$$

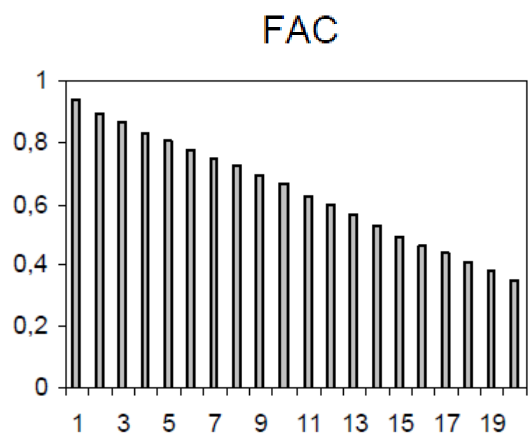
# Modelos estocásticos de previsão
## Processos não estacionários

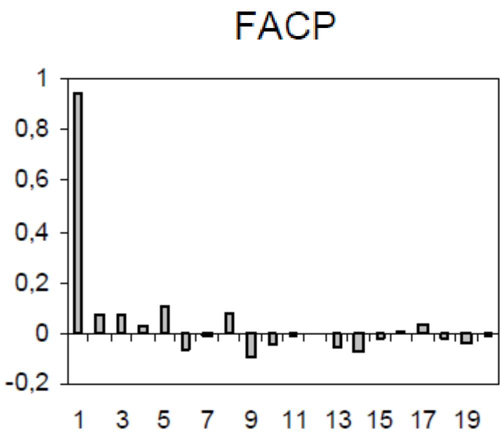
Para analisar a implicação do operador de diferenciação na estacionarização de uma série, considere-se o seguinte modelo de tendência estocástica,

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \,,$$

onde $\varepsilon_t$ é um ruído branco. Este modelo é vulgarmente conhecido por modelo de passeio aleatório ("*random walk*"), pois descreve a série no momento $t$ com base no seu valor passado (no momento $t-1$) mais um choque aleatório.



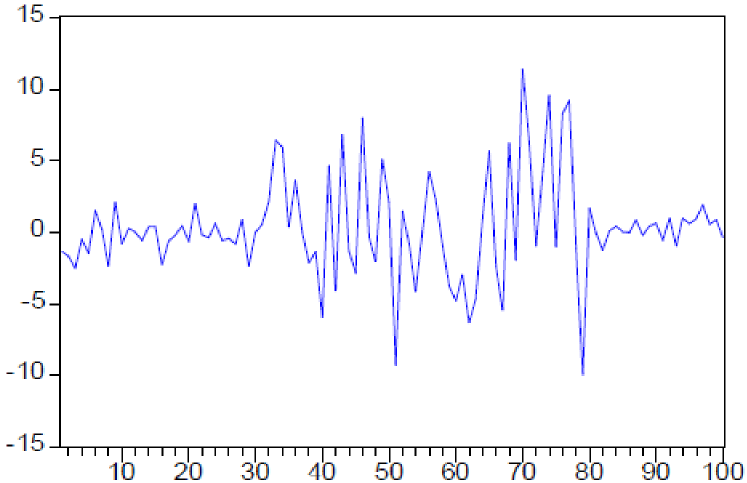



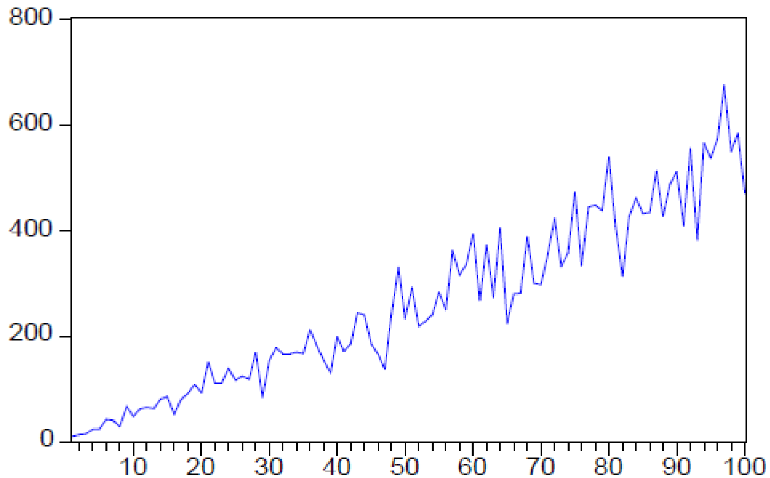



# Modelos estocásticos de previsão
## Processos não estacionários

Um processo estacionário em média não é necessariamente estacionário em variância e covariância. Contudo, um processo que não é estacionário em média também não é estacionário em variância e covariância.

Série não estacionária em variância mas estacionária em média




Série não estacionária em variância nem em média

Para estabilizar a variância de uma série não estacionária em variância, podemos utilizar um método de transformação paramétrica baseado na seguinte expressão:

$$X_t = T(Y_t) = \begin{cases} Y_t^{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log(Y_t), & \lambda = 0 \end{cases},$$

onde os valores de $\lambda$ são escolhidos no intervalo $[-1,1]$, sendo os mais correntes $-1$, $-0.5$, 0, 0.5 e 1, a que correspondem as transformações $X_t = 1/Y_t$, $X_t = 1/\sqrt{Y_t}$, $X_t = \log Y_t$, $X_t = \sqrt{Y_t}$ e $X_t = Y_t$, respectivamente.

# **Modelos estocásticos de previsão**
## Processos não estacionários

O modelo ARIMA($p$,$d$,$q$) assume a expressão:

$$(1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p)(1-B)^d Y_t=(1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q)\varepsilon_t$$

onde $(1-B)^d Y_t$, com $d\geq 1$ é a série estacionária depois de diferenciada $d$ vezes, $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ são os parâmetros autoregressivos e $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$ os parâmetros médias móveis.

As formas mais simples e frequentes do modelo ARIMA são ARIMA(0,1,0), ARIMA(1,1,0), ARIMA(0,1,1) e ARIMA (1,1,1). Por exemplo, o modelo ARIMA(1,1,0) tem a representação:

$$(1-\phi_1 B)(1-B)Y_t=\varepsilon_t$$

ou, multiplicando os factores,

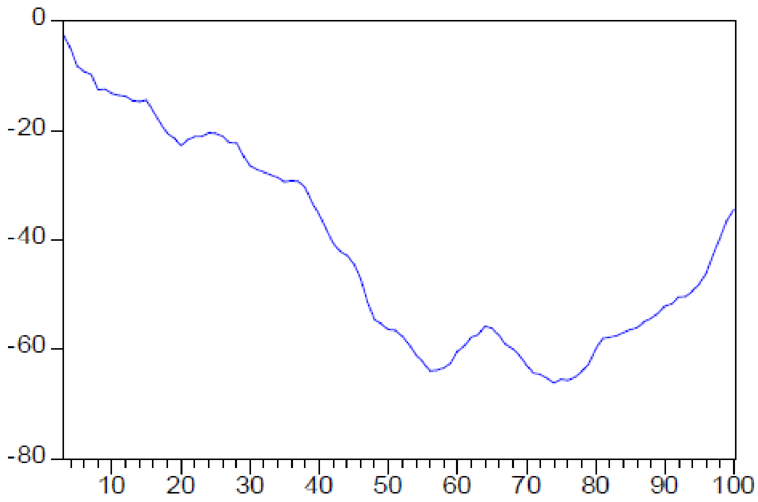
$$(1-\phi_1 B+B+\phi_1 B^2)Y_t=\varepsilon_t\,,$$

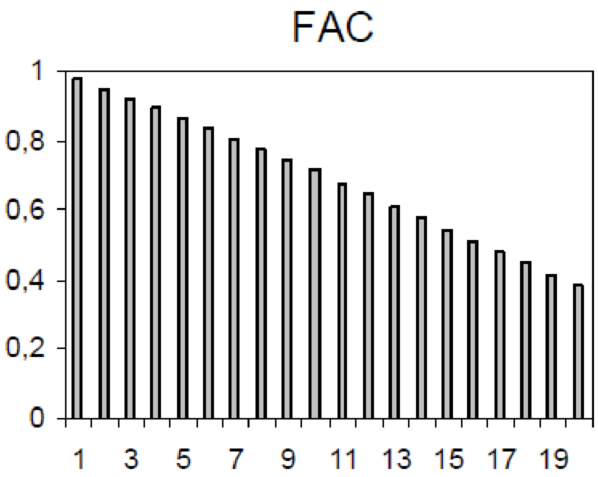
donde sai,

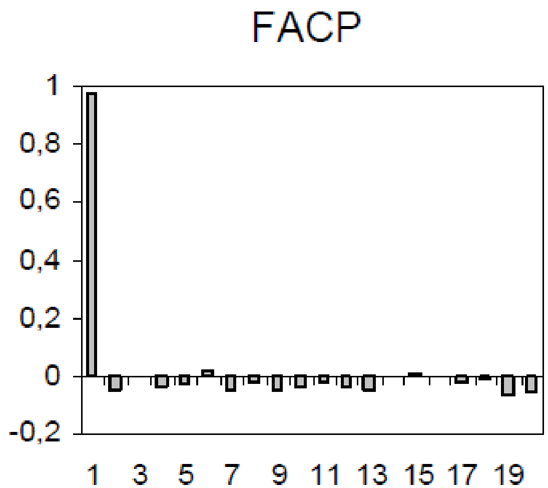
$$Y_t=(1+\phi_1)Y_{t-1}-\phi_1 Y_{t-2}+\varepsilon_t\,.$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Processos não estacionários

$$(1-0{,}75B)(1-B)Y_t = \varepsilon_t$$



Assim sendo, pode extender-se o modelo ARIMA a um modelo multiplicativo integrado sazonal representado simbolicamente por modelo SARIMA($p$,$d$,$q$)($P$,$D$,$Q$)$_s$. Por exemplo, o modelo SARIMA(0,1,1)(0,1,1)$_{12}$ tem a representação:

$$(1-B)(1-B^{12})Y_t=(1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^{12})\varepsilon_t$$

ou, multiplicando os factores,

$$(1-B-B^{12}+B^{13})Y_t=(1-\theta_1 B-\Theta_1 B^{12}+\theta_1\Theta_1 B^{13})\varepsilon_t\,,$$

tem-se a relação equivalente,

$$Y_t=Y_{t-1}-Y_{t-12}+Y_{t-13}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\Theta_1\varepsilon_{t-12}+\theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-13}\,.$$

Na maioria das aplicações práticas, os valores de $p$, $q$, $P$ e $Q$ são quase sempre inferiores ou iguais a 2, enquanto que os valores de $d$ e $D$ usualmente assumem os valores inteiros 0 ou 1. As FAC e FACP dos modelos SARIMA apresentam um decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido sobre os *lags* não sazonais e sazonais, respectivamente.

# Modelos estocásticos de previsão
## Metodologia de análise – modelos ARIMA/SARIMA

A primeira etapa de modelação de uma série temporal consiste na identificação de um modelo SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$ que descreva a relação existente entre as suas observações. Passo a dar:

- Construção do cronograma da série e sua estacionarização
- Estimação das FAC e FACP da série original
- Teste de raízes unitárias
- Estimação das FAC e FACP da série estacionária e identificação dos inteiros $p$, $q$, $P$ e $Q$

# Modelos estocásticos de previsão
## Metodologia de análise – modelos ARIMA/SARIMA

Uma vez identificados os modelos candidatos a descrever a série, segue-se a etapa de estimação dos seus parâmetros. Os dois principais métodos de estimação dos parâmetros do modelo ARIMA são:

**Método da máxima verosimilhança**, que consiste em determinar os valores dos parâmetros que tornam mais verosímil a ocorrência de um conjunto de observações idênticas aquelas de que efectivamente se dispõe. Este método obtém estimativas dos parâmetros através de um processo iterativo em que se maximiza a função de verosimilhança dos estimadores.

**Método dos mínimos quadrados.** Este método não permite obter estimadores consistentes com os verdadeiros parâmetros. Excepção feita nos casos em que se tem modelos com apenas componente autoregressiva, em que os estimadores se podem obter por minimização da soma de quadrados dos resíduos.

# Modelos estocásticos de previsão
## Metodologia de análise – modelos ARIMA/SARIMA

Esta etapa refere-se à avaliação da qualidade estatística das estimativas obtidas e da qualidade do ajustamento do modelo às observações da série em estudo.

- Avaliação da qualidade estatística das estimativas obtidas:
  - Teste de significância individual
  - Análise das correlações entre estimativas
- Avaliação da qualidade do ajustamento do modelo ARIMA (análise dos resíduos)
  - Teste de significância individual da FAC e da FACP
  - Teste de significância global da FAC
  - Teste de normalidade dos resíduos

# Modelos estocásticos de previsão
## Metodologia de análise – modelos ARIMA/SARIMA

Existem dois critérios de selecção de modelos que tomem em consideração as estatísticas baseadas nos resíduos do modelo ajustado:

- Critério de Informação de Akaike (AIC)

$$\text{AIC} = -2\ln L + 2m$$

No caso do Eviews: $\text{AIC} = n\ln\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^{2} + 2m$

- Critério Bayesiano de Schwartz (BIC)

$$\text{BIC} = n\ln\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^{2} + m\ln n$$

# Modelos estocásticos de previsão
## Previsão com modelos ARIMA/SARIMA

Suponhamos que temos no momento $T$ as observações $Y_T$, $Y_{T-1}$, $Y_{T-2}$, ... de uma série temporal e pretendemos, com base nestas, prever o valor futuro no momento $T+m$, $Y_{T+m}$. A previsão para o instante $T+m$ será função dos valores presentes e passados da série, isto é:

$$\hat{Y}_T(m) = P_T(m) = E(Y_{T+m} \mid Y_T, Y_{T-1}, Y_{T-2}, \ldots),$$

onde $P_T(m)$ é o preditor de $Y_{T+m}$, $T$ é a origem da previsão e $m$ é o horizonte da previsão.

No que se refere ao horizonte temporal, o estabelecimento de previsões reveste-se de duas formas: previsão estática (passo-a-passo) e previsão dinâmica (a múltiplos passos à frente).

Erros de previsão para modelos ARMA

Erros de previsão para modelos ARIMA

Previsão com o modelo AR(1)

Estática: $\hat{Y}_{T+m-1}(1) = P_{T+m-1}(1) = E(Y_{T+m} \mid Y_{T+m-1}, \ldots, Y_1) = \phi Y_{T+m-1}$

Dinâmica: $\hat{Y}_T(m) = P_T(m) = E(Y_{T+m} \mid Y_T, \ldots, Y_1) = \phi \hat{Y}_{T+m-1} = \phi P_{T+m-1} = \phi(\phi^{m-1} Y_T) = \phi^m Y_T$

Variância do erro de previsão: $V[e_T(m)] = E[e_T^2(m)] = (1 + \phi^2 + \cdots + \phi^{2m-2})\sigma_\varepsilon^2$

# Modelos estocásticos de previsão
## Previsão com modelos ARIMA/SARIMA

Previsão com o modelo MA(1)

Estática: $\hat{Y}_{T+m-1}(1) = P_{T+m-1}(1) = E(Y_{T+m} \mid Y_{T+m-1}, \ldots, Y_1) = E(c + \varepsilon_{T+m} - \theta\varepsilon_{T+m-1}) = c - \theta\hat{\varepsilon}_{T+m-1}$

Dinâmica: $\hat{Y}_T(m) = P_T(m) = E(Y_{T+m} \mid Y_T, \ldots, Y_1) = E(c + \varepsilon_{T+m} - \theta\varepsilon_{T+m-1}) = c$

Variância do erro de previsão: $V[e_T(m)] = E[e_T^2(m)] = E\left[(Y_{T+m} - P_T(m))^2\right] = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$

Previsão com o modelo ARMA(1,1)

Estática: $\hat{Y}_{T+m-1}(1) = P_{T+m-1}(1) = E(Y_{T+m} \mid Y_{T+m-1}, \ldots, Y_1) = c + \phi Y_{T+m-1} - \theta\varepsilon_{T+m-1}$

Dinâmica:
$$\begin{aligned}\hat{Y}_T(m) &= P_T(m) = E(Y_{T+m} \mid Y_T, \ldots, Y_1) = E(c + \phi Y_{T+m-1} + \varepsilon_{T+m} - \theta\varepsilon_{T+m-1}) \\ &= c(\phi^{m-1} + \cdots + \phi + 1) + \phi^m Y_T - \phi^{m-1}\theta\varepsilon_T.\end{aligned}$$

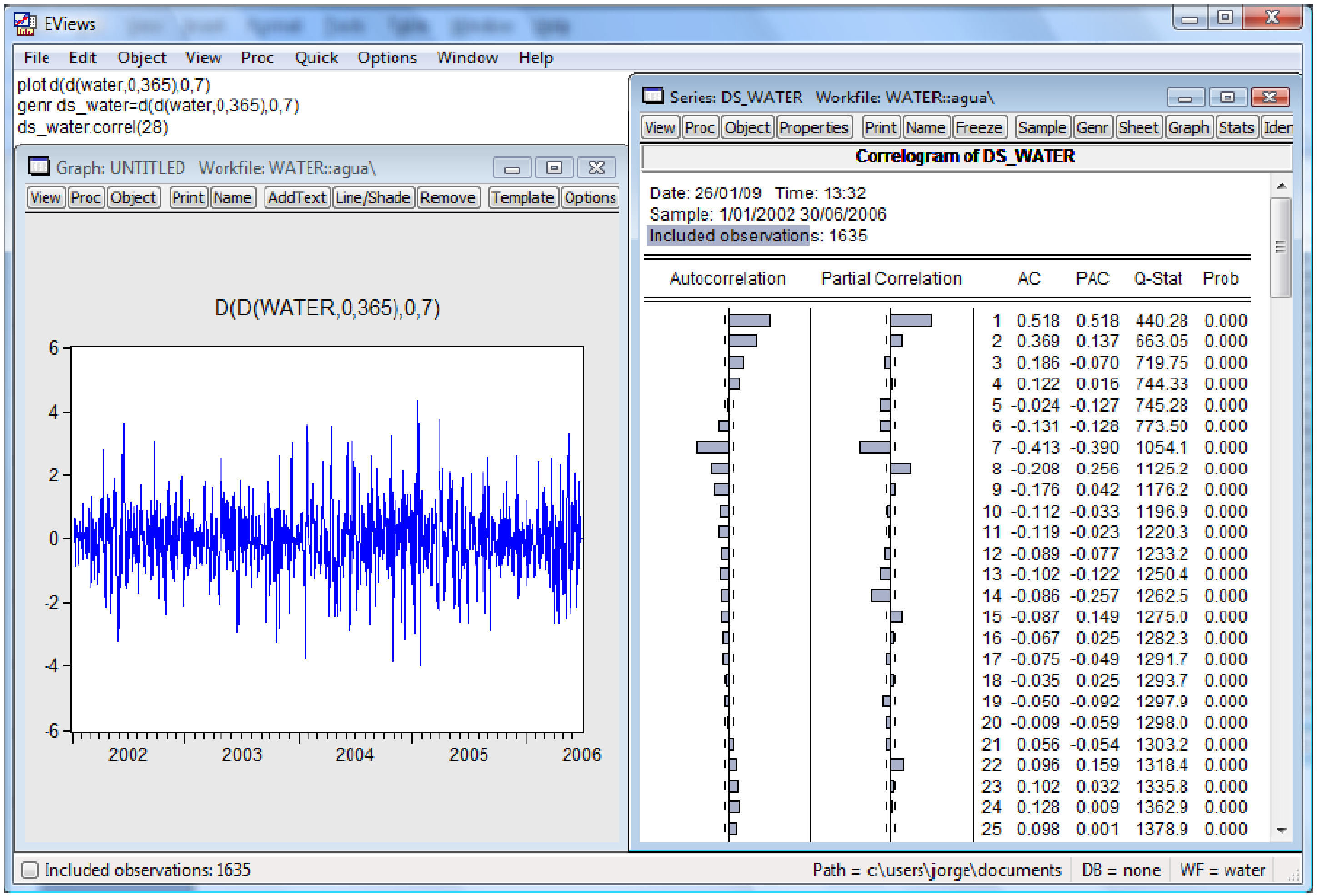
Variância do erro de previsão: $V[e_T(m)] = E[e_T^2(m)] = \left\{1 + \sum_{j=1}^{m-1}\left[\phi^{m-1}(\phi-\theta)\right]^2\right\}\sigma_\varepsilon^2$

# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água

Para ilustrar a metodologia de modelação e previsão ARIMA de séries temporias, considerou-se uma série de consumo diário de água em Granada (Espanha) observada no período de 1 de Janeiro de 2002 a 30 de Junho de 2006, num total de 2006 observações. Os dados foram obtidos através da Spanish IEEE Computational Intelligence Society (Fonte: http://www.congresocedi.es/2007) e utilizados pelo autor num estudo de análise comparativa de modelos de previsão estocásticos e determinísticos com dupla sazonalidade para previsão do consumo de água (veja-se Caiado, 2009).

A observação correspondente ao dia 29 de Fevereiro do ano bissexto 2004 foi eliminada da amostra de modo a manter o mesmo número de dias (365) em cada ano. Para a amostra de estimação ("training sample"), foram utilizadas as primeiras 1976 observações entre 1 de Janeiro de 2002 e 31 de Maio de 2006 e para a amostra pós-estimação de avaliação de previsões ("post-sample"), foram utilizadas as restantes 30 observações entre 1 e 30 de Junho de 2006. Para o estudo de modelação e previsão foi utilizado o programa EVIEWS.

# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água



# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água

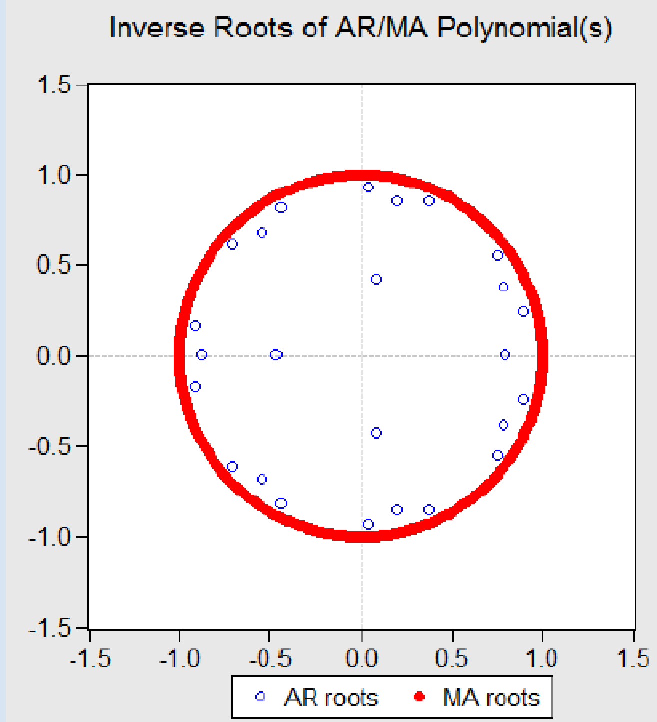
Equation: DOUBLE_SARIMA Workfile: WATER::agua\

Dependent Variable: D(D(WATER,0,365),0,7)
Method: Least Squares
Date: 26/01/09 Time: 12:10
Sample (adjusted): 2/02/2002 31/05/2006
Included observations: 1580 after adjustments
Convergence achieved after 9 iterations
MA Backcast: OFF (Roots of MA process too large)

| | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -0.003320 | 0.009039 | -0.367343 | 0.7134 |
| AR(1) | 0.488939 | 0.025015 | 19.54615 | 0.0000 |
| AR(2) | 0.132863 | 0.026536 | 5.006875 | 0.0000 |
| AR(4) | 0.071843 | 0.022797 | 3.151425 | 0.0017 |
| SAR(7) | -0.741364 | 0.025750 | -28.79082 | 0.0000 |
| SAR(14) | -0.511343 | 0.030295 | -16.87886 | 0.0000 |
| SAR(21) | -0.143628 | 0.028921 | -4.966155 | 0.0000 |
| MA(21) | -0.128423 | 0.029652 | -4.331071 | 0.0000 |
| MA(365) | -0.621507 | 0.023438 | -26.51749 | 0.0000 |

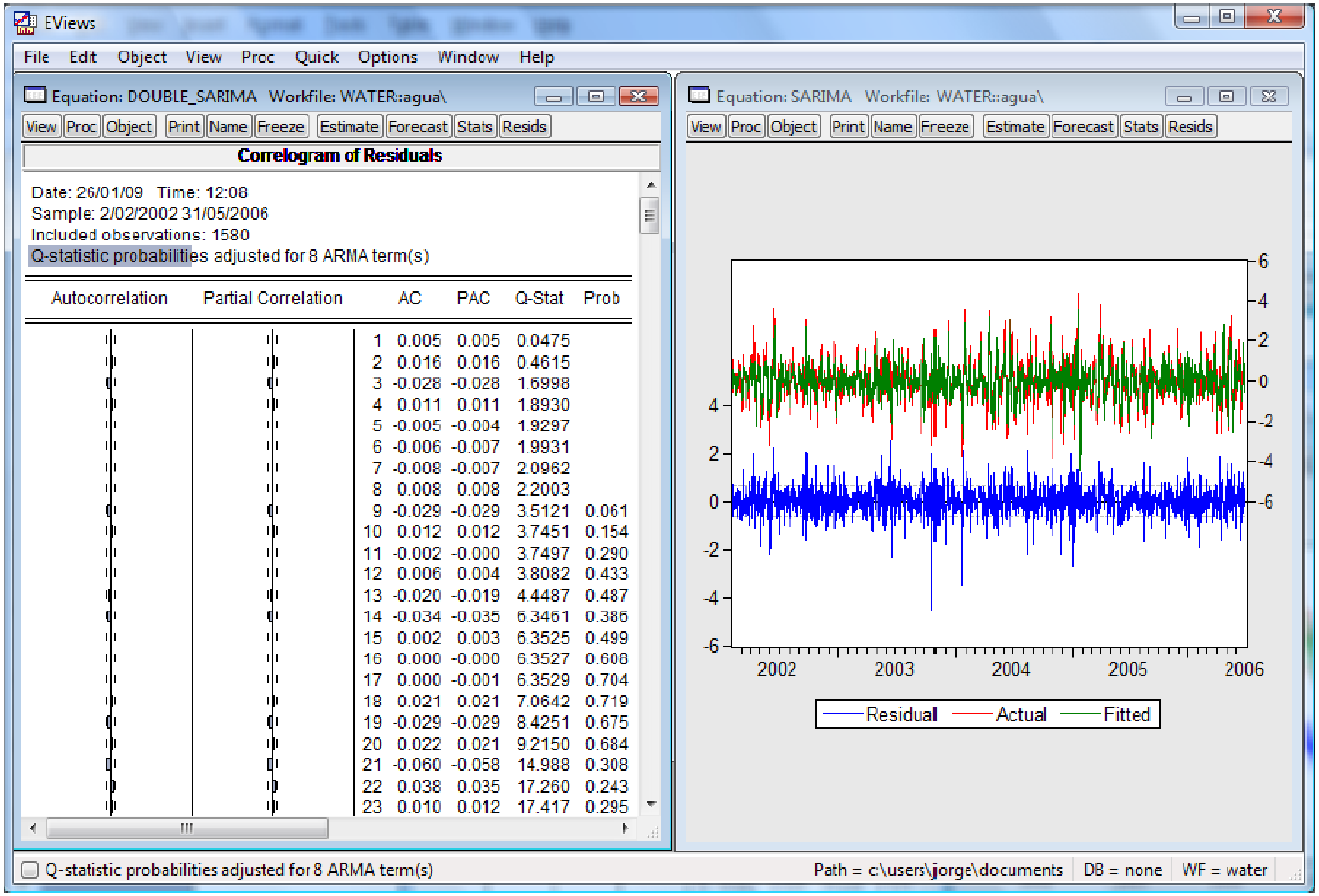
| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.639072 | Mean dependent var | -0.009307 |
| Adjusted R-squared | 0.637234 | S.D. dependent var | 1.023495 |
| S.E. of regression | 0.616451 | Akaike info criterion | 1.876004 |
| Sum squared resid | 596.9988 | Schwarz criterion | 1.906566 |
| Log likelihood | -1473.044 | Hannan-Quinn criter. | 1.887360 |
| F-statistic | 347.7091 | Durbin-Watson stat | 1.987237 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

Equation: SARIMA Workfile: WATER::agua\



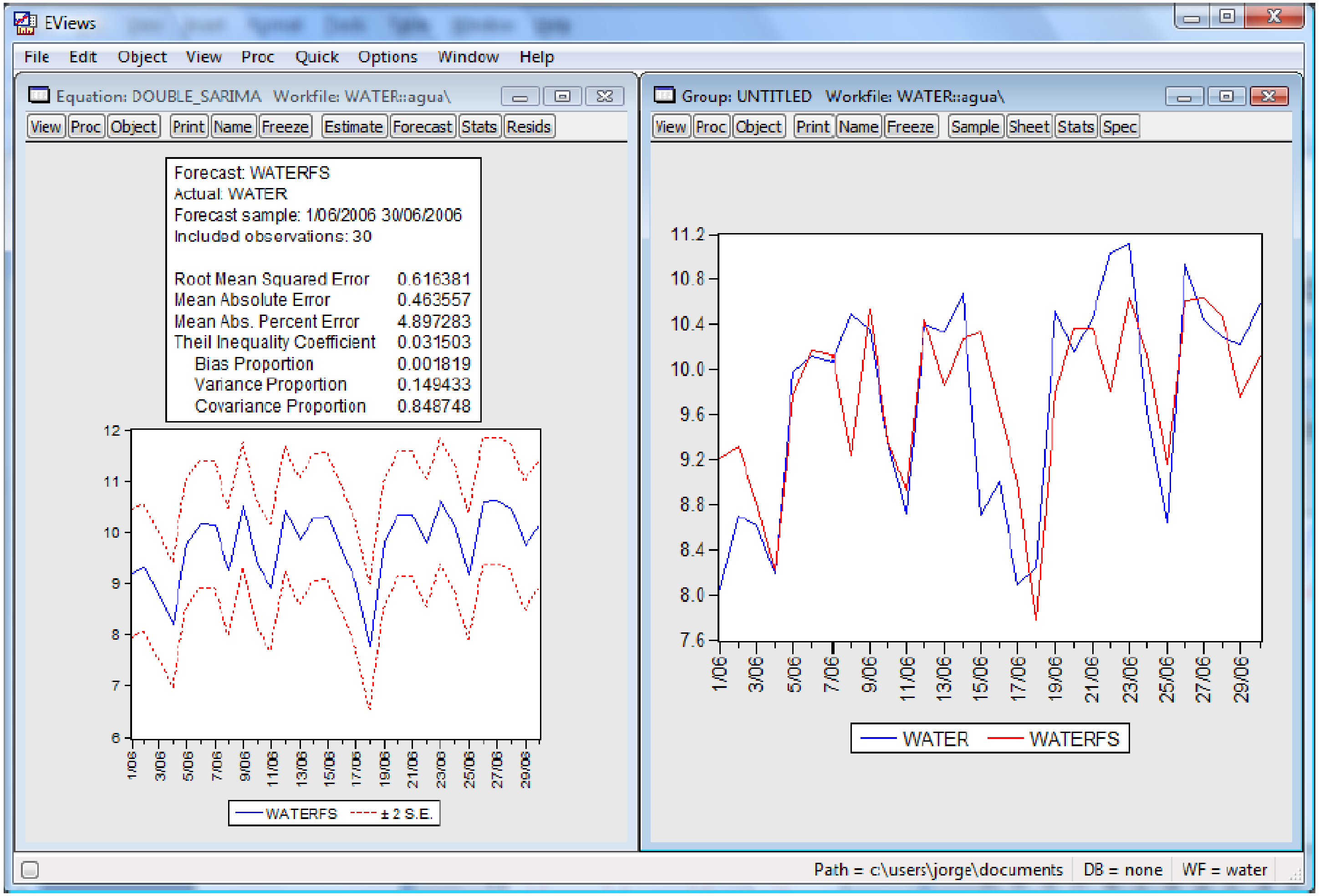

0.6390723197270123 Path = c:\users\jorge\documents DB = none WF = water

# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água

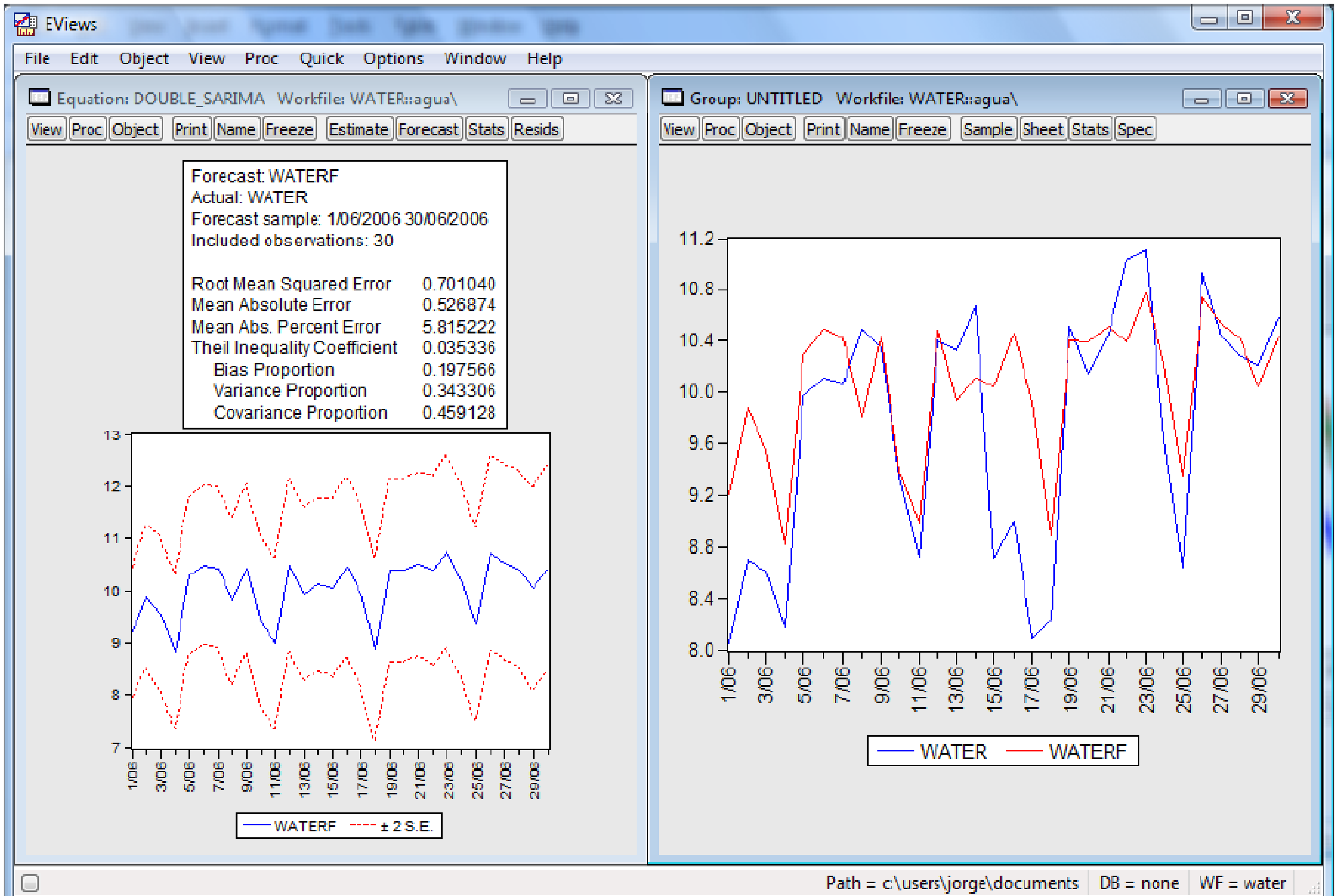



| | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.005 | 0.005 | 0.0475 | |
| 2 | 0.016 | 0.016 | 0.4615 | |
| 3 | -0.028 | -0.028 | 1.6998 | |
| 4 | 0.011 | 0.011 | 1.8930 | |
| 5 | -0.005 | -0.004 | 1.9297 | |
| 6 | -0.006 | -0.007 | 1.9931 | |
| 7 | -0.008 | -0.007 | 2.0962 | |
| 8 | 0.008 | 0.008 | 2.2003 | |
| 9 | -0.029 | -0.029 | 3.5121 | 0.061 |
| 10 | 0.012 | 0.012 | 3.7451 | 0.154 |
| 11 | -0.002 | -0.000 | 3.7497 | 0.290 |
| 12 | 0.006 | 0.004 | 3.8082 | 0.433 |
| 13 | -0.020 | -0.019 | 4.4487 | 0.487 |
| 14 | -0.034 | -0.035 | 6.3461 | 0.386 |
| 15 | 0.002 | 0.003 | 6.3525 | 0.499 |
| 16 | 0.000 | -0.000 | 6.3527 | 0.608 |
| 17 | 0.000 | -0.001 | 6.3529 | 0.704 |
| 18 | 0.021 | 0.021 | 7.0642 | 0.719 |
| 19 | -0.029 | -0.029 | 8.4251 | 0.675 |
| 20 | 0.022 | 0.021 | 9.2150 | 0.684 |
| 21 | -0.060 | -0.058 | 14.988 | 0.308 |
| 22 | 0.038 | 0.035 | 17.260 | 0.243 |
| 23 | 0.010 | 0.012 | 17.417 | 0.295 |

# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água



# Aplicações do modelo ARIMA
## Consumo de água



# Modelos estocásticos de previsão
## Exemplos de aplicação

No ficheiro em EViews “Dados_metodosprevisao.wk1” – page “COFFEE”, encontram-se os dados do consumo de café nos EUA entre 1910 e 1967.

**a)** Construa o cronograma e analise o andamento da série.

**b)** Ajuste um modelo ARMA aos dados observados entre 1910 e 1963, seguindo as etapas habituais de identificação, estimação, avaliação do diagnóstico e selecção de modelos.

**c)** Estabeleça previsões dinâmicas e estáticas para os 4 anos seguintes e avalie os erros de previsão EQM, EAM e EPAM.

No ficheiro em EViews “Dados_metodosprevisao.wk1” – page “HOUSE”, encontra-se uma série temporal de vendas de moradias unifamiliares entre 1987M1 e 1995M11.

**a)** Construa o cronograma e analise o andamento da série.

**b)** Ajuste um modelo SARMA aos dados observados entre 1987M1 e 1994M11, seguindo as etapas habituais de identificação, estimação, avaliação do diagnóstico e selecção de modelos.

**c)** Estabeleça previsões dinâmicas e estáticas para o período 1994M12-1994M11 e avalie os erros de previsão EQM, EAM e EPAM.

# Referências bibliográficas


- Box, G. P. E., Jenkins, G. M. e Reinsel, G. (1994). Time Series Analysis: Forecasting and Control, 3rd ed., Prentice-Hall.
- Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991). Time Series: Theory and Methods. 2nd ed., Springer, New York.
- Caiado, J. (2011): *Métodos de Previsão em Gestão com Aplicações em Excel*, Edições Sílabo, Lisboa.
- Caiado, J. (2010). "Performance of combined double seasonal univariate time series models for forecasting water demand", *Journal of Hydrologic Engineering*, 15, 215-222.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. e Hyndman, R. (1998): *Forecasting: Methods and Applications*, 3ª edição, John Wiley & Sons, New York.
- Peña, D., Tiao, G. e Tsay, R. (2001). A Course in Time Series Analysis, Wiley, New York.
- Shumway, R. H. and Stoffer, D. S. (2000). Time Series Analysis and Its Applications. Springer-Verlag, New York.
- Wei, W. W. S. (2007). Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods. 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California